

CAPITOLO II

MATRICI E DETERMINANTI

PARTE STORICA

Il concetto di *matrice* (dal latino *matrix* o *mater*) fu introdotto da James Joseph Sylvester (1814-97) in “An essay on canonical forms” (Londra, 1851) per indicare una disposizione rettangolare di numeri alla quale si potessero, nel caso quadrato, associare quantità numeriche dette *determinanti*. A parte alcuni prodromi risalenti a vari autori quali Gabriel Cramer (1750, Genova), Pierre Simon Laplace e Alexandre Théophile Vandermonde (1770), Etienne Bezout (1779), la teoria dei determinanti nasce in una *Memoria* di Cauchy del 1812 ed in un contemporaneo lavoro, meno perfetto, di Jacques Binet (1786-1856). Augustin Louis Cauchy (1789-1857, ingegnere militare e Professore all’Ecole Polytechnique di Parigi) riprende il termine di determinante da Carl Friedrich Gauss (che non diede effettivamente contributi alla teoria) sviluppandone di fatto l’intera teoria. La notazione a due indici attuale è dovuta al matematico tedesco Leopold Kronecker (1823-1891) mentre la nozione di *rango* (o *caratteristica*) di una matrice è merito del tedesco Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917). A partire dal 1858, in una serie di lavori, Arthur Cayley (1821-1895), matematico ed avvocato inglese, professore di Algebra a Cambridge ed autore di più di mille *Memorie*, iniziò ad operare con le matrici definendo per esse le operazioni di addizione e moltiplicazione, costruendo, in tal modo, le basi del moderno calcolo matriciale. La teoria delle matrici, dunque, sviluppata in stretta connessione con la teoria dei vettori, ha trovato notevoli applicazioni in molte branche sia della Matematica che della Fisica.

1. GENERALITÀ

Siano dati $m \times n$ numeri reali a_{ij} (non necessariamente tutti nulli).

Definizione 1.1.

Si definisce *matrice* ad m righe ed n colonne o brevemente *matrice di ordine* $m \times n$ e la si indica, per comodità, con una lettera maiuscola dell’alfabeto, una m -upla ordinata di n -uple ordinate. Gli elementi di una medesima n -upla si dicono *righe*, quelli aventi il medesimo indice in n -uple diverse si dicono *colonne*.

Da un punto di vista più intuitivo si può definire una *matrice* come un insieme A di mn elementi disposti come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Generalmente si è soliti indicare, per comodità, una matrice anche nel seguente modo:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

Ogni elemento a_{ij} della matrice A è dotato di due indici, i e j , il primo dei quali denota il numero d'ordine dell'orizzontale a cui l'elemento appartiene ed il secondo il numero d'ordine della verticale. Le orizzontali si chiamano *righe* della matrice e le verticali *colonne*, mentre si definisce *linea* indifferentemente un'orizzontale od una verticale. Il significato delle parole *righe* e *colonne* è lo stesso, ovviamente, di quello riportato nel primo capoverso. Dunque, l'elemento a_{ij} appartiene alla riga i -esima e alla colonna j -esima.

A volte occorre indicare esplicitamente, nella lettera che denota la matrice, il numero m delle righe ed n delle colonne di cui è composta; in tal caso si scrive $A_{m \times n}$ al posto di A .

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = A_{3 \times 2} \quad \text{è una matrice } 3 \times 2 \text{ (} m = 3 \text{ ed } n = 2 \text{)}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \quad \text{è una matrice } 3 \times 3 \text{ (} m = 3 \text{ ed } n = 3 \text{)}$$

Definizione 1.2.

Una matrice A di ordine $m \times n$ si dice *rettangolare* se in essa il numero delle righe è diverso da quello delle colonne.

Nel caso $m = n$ la matrice A si dice *quadrata* di ordine n (o m) con $n^2 = m^2$ elementi. Una siffatta matrice si indica brevemente come segue:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } i = j = 1, 2, \dots, n$$

Gli elementi $a_{11}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$ formano la *diagonale principale* di A .

Gli elementi $a_{n,1}, \dots, a_{i,n-i+1}, \dots, a_{1n}$ formano la *diagonale secondaria* di A .

In particolare se $m = n = 1$ la matrice $A = (a_{11})$ è quadrata ed in questo caso la diagonale principale e quella secondaria coincidono con l'unico elemento a_{11} .

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice rettangolare } 2 \times 3 \text{ (} m = 2 \text{ ed } n = 3 \text{)}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice quadrata } 2 \times 2 \text{ (} n = m = 2 \text{)}$$

In tal caso gli elementi 2, 2 formano la diagonale principale mentre gli elementi 1, 3 quella secondaria.

$$3) A = (2) \quad \text{è una matrice quadrata con } m = n = 1$$

In questo esempio la diagonale principale e quella secondaria coincidono con il solo elemento 2 della matrice A .

Definizione 1.3.

Una matrice quadrata D si dice *diagonale* se in essa sono nulli tutti gli elementi al di fuori di quelli che si trovano sulla diagonale principale.

ESEMPIO

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice diagonale } 3 \times 3$$

Definizione 1.4.

Una matrice quadrata A di ordine n si dice *triangolare superiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale; al contrario si dice *triangolare inferiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice triangolare inferiore}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice triangolare superiore}$$

Osservazione: una matrice diagonale è una matrice triangolare sia superiore che inferiore.

Definizione 1.5.

Data una qualunque matrice A di ordine $m \times n$ si definisce *trasposta* di A e la si indica con A^T la matrice di ordine $n \times m$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.6.

Una matrice A di ordine $m \times n$ si dice *simmetrica* se $A = A^T$.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice simmetrica}$$

Definizione 1.7.

Una matrice quadrata del tipo

$$I_n = (d_{ij}) \quad \text{con} \quad d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{per } i, j = 1, 2, \dots, n$$

si chiama matrice *identica* o *unitaria* di ordine n . In altre parole una matrice *identica* è una matrice diagonale in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali ad uno.

ESEMPIO

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice identità di ordine 3 (diagonale con gli elementi unitari)}$$

Definizione 1.8.

Siano $m > 1$ ed $n > 1$. Fissato un elemento qualsiasi a_{ij} della matrice A di ordine $m \times n$ si definisce *minore complementare* di a_{ij} e lo si indica con A_{ij} la matrice, di ordine $(m - 1) \times (n - 1)$, che si ottiene da A escludendo tutti gli elementi della riga i -esima e della colonna j -esima.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{è il minore complementare di } a_{21}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è il minore complementare di } a_{21}$$

2. DETERMINANTI

Scopo di questo paragrafo è di introdurre un numero associato ad una matrice quadrata A che si chiama *determinante* di A e si denota con $\det A$ oppure con $|A|$. Siffatto numero riveste notevole interesse in molti argomenti ed è essenziale, quindi, imparare il suo calcolo.

Sia A una matrice quadrata di ordine n .

Definizione 2.1.

Se $n = 1$, cioè $A = (a_{11})$, allora il numero a_{11} si chiama *determinante* di A e si scrive

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

ESEMPI

$$1) A = (2) \quad \Rightarrow \quad \det A = | 2 | = 2$$

$$2) A = (5) \quad \Rightarrow \quad \det A = | 5 | = 5$$

Definizione 2.2.

Se $n = 2$, cioè $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora il *determinante* di A è il numero $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ e si pone:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -1 - 3 = -4$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -2 - 2 = -4$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$$

Definizione 2.3.

Se $n = 3$, cioè $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ si pone per definizione:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Un metodo pratico che consente di calcolare solo il determinante di una matrice del terzo ordine è fornito dalla seguente *regola di Sarrus*: data una matrice A di ordine tre si consideri la tabella ottenuta da A aggiungendo ad essa, a destra, nell'ordine, le sue prime due colonne, cioè

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Si ottiene il determinante di A eseguendo la somma dei prodotti degli elementi delle diagonal principali, $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$, $\{a_{12}, a_{23}, a_{31}\}$, $\{a_{13}, a_{21}, a_{32}\}$, e sottraendo ad essa la somma dei prodotti degli elementi delle diagonal secondarie, $\{a_{31}, a_{22}, a_{13}\}$, $\{a_{32}, a_{23}, a_{11}\}$, $\{a_{33}, a_{21}, a_{12}\}$.

ESEMPI

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, applicando la *regola di Sarrus*, si ha la seguente tabella

mnemonica:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 3 & 6 & 8 \end{array}$$

da cui segue che

$$\det A = 1 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 \cdot 8 - (6 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3) = (21 + 72 + 80) - (210 + 32 + 18) = -87$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 15 - 16 - (0 + 60 + 0) = -91$$

Osservazione: le definizioni precedenti forniscono anche metodi pratici per il calcolo del determinante di una matrice quadrata A di ordine $n = 1, 2, 3$. Analizziamo adesso, invece, un criterio generale che ci consenta di calcolare il determinante di una matrice quadrata A di ordine qualsiasi $n \geq 2$.

Premettiamo, a tal proposito, la seguente

Definizione 2.4.

Data una matrice A di ordine $m \times n$, si definisce *minore di ordine $m-i$* , estratto da A , il determinante ottenuto dalla matrice sopprimendo i righe e j colonne in modo che sia $m-i = n-j$.

Ne segue che ogni elemento di una qualunque matrice rappresenta un minore del primo ordine.

ESEMPI

1) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ allora i minori di ordine tre estraibili da A sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix};$$

2) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ allora i minori di ordine tre estraibili da A sono:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre alcuni minori di ordine due estraibili da A sono, per esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

e così via.

Definizione 2.5.

Sia a_{ij} un elemento qualsiasi di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} , e si indica con A_{ij} , il determinante del minore complementare di a_{ij} preso con il segno positivo o negativo a seconda che la somma $i + j$ sia rispettivamente pari o dispari.

ESEMPI

1) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ allora:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |4| = 4 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{11} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |3| = -3 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{21} = 2$$

e così via.

2) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ allora:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{11} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{12} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{13} = 2$$

e via dicendo.

Osservazione: la definizione generale di *determinante di ordine n* viene data per ricorrenza cioè in funzione di quella di determinante di ordine $n-1$; i determinanti di ordine $n-1$ si ottengono in funzione di quelli di ordine $n-2$ e così via fino a quelli di ordine almeno tre che si sanno calcolare direttamente.

Definizione 2.6. (definizione generale di determinante)

Data una matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$, si chiama *determinante* di A il numero che si indica con $\det A$ oppure $|A|$ formato dalla somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) qualsiasi della matrice per i rispettivi complementi algebrici.

Dalla precedente definizione può sorgere il dubbio che il calcolo di un determinante dipenda dalla particolare linea scelta. Si dimostra a riguardo che sussiste il seguente

Teorema (di Laplace): se A è una matrice quadrata di ordine n allora il valore numerico di $\det A$ è sempre il medesimo quale che sia la linea scelta per il suo calcolo.

ESEMPI

1) Calcolare il determinante associato alla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

secondo gli elementi della prima riga. (E' consigliabile, in fase preliminare, eseguire tale calcolo utilizzando la *regola di Sarrus* e verificare che il risultato ottenuto è esattamente 141).

Si ha:

$$\det A = 3 A_{11} + 2 A_{12} - 1 A_{13} = 3 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 2 (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 (20 + 14) - 2 (-25 - 6) - (35 - 12) = 141$$

Osserviamo ora che se si calcola il determinante secondo gli elementi, ad esempio, della seconda colonna si ottiene, in accordo con il *teorema di Laplace*, sempre lo stesso risultato. Infatti si ha:

$$\det A = 2 A_{12} + 4 A_{22} - 7 A_{32} = 2 (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 7 (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 (-25 - 6) + 4 (15 + 3) + 7 (6 - 5) = 141$$

2) Calcolare $\det A$, essendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per economia di calcolo conviene, in questo caso, fissare la riga o la colonna nella quale figurino il maggior numero possibile di elementi nulli. Se per esempio si fissa la prima riga si ha:

$$\det A = 1 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 (-1 + 6 + 3 + 2) + 1 (4 + 2) = 10 + 6 = 16$$

Lo studente provi, per esercizio, a calcolare lo stesso determinante fissando, ad esempio, la terza riga oppure la prima colonna, verificando che variando la linea di partenza il valore del determinante non muta. Naturalmente lo si può calcolare fissando, per esempio, anche la quarta riga ma è evidente che in alcuni casi il procedimento risulta essere più laborioso.

3. PROPRIETÀ E CALCOLO DEI DETERMINANTI

Come si è visto negli esempi illustrati nei paragrafi precedenti, il calcolo manuale di un determinante, pur essendo concettualmente semplice, in realtà è molto laborioso e la difficoltà aumenta notevolmente al crescere dell'ordine della matrice. In questo paragrafo, pertanto, enunceremo alcuni teoremi che facilitino il calcolo dei determinanti di matrici quadrate; non si definisce, infatti, una nozione di determinante per matrici rettangolari.

Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$.

PROP.1) Se in A tutti gli elementi di una linea (riga o colonna) sono nulli, allora $\det A = 0$.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

PROP.2) Se in A si scambiano tra loro due linee parallele (due righe o due colonne) il determinante cambia di segno.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ (scambiando le prime due righe)}$$
$$\det A = -23 \qquad \det A' = +23$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ (scambiando la seconda e la terza colonna)}$$
$$\det A = -9 \qquad \det A' = +9$$

PROP.3) Se in A gli elementi di due linee parallele (due righe o due colonne) sono uguali o proporzionali, allora $\det A = 0$.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \quad \text{(le prime due righe sono uguali)}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -4 & -8 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \quad (\text{la seconda colonna è multipla della prima})$$

PROP.4) Se in A si moltiplicano tutti gli elementi di una medesima linea (riga o colonna) per uno stesso numero reale k , il determinante della matrice risultante è $k \det A$.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad k = 6 \Rightarrow \text{moltiplicando gli elementi della seconda riga per 6 si ha:}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -\frac{5}{6} \quad e \quad \det A' = -5 = k \det A$$

PROP.5) (Teorema della trasposta) Se in A si scambiano ordinatamente le righe con le colonne si ottiene una nuova matrice A^T tale che $\det A^T = \det A$.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -39 \qquad \det A^T = -39$$

PROP.6) Sia A una matrice quadrata di ordine n . Supponiamo che una linea (riga o colonna) di A sia somma di due date n -uple (b_i) e (c_i) . Siano B e C le due matrici ottenute da A sostituendo la linea prefissata una volta con (b_i) ed una seconda volta con (c_i) . Allora

$$\det A = \det B + \det C$$

ESEMPI

$$1) \det \begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 1 \\ 3+2 & 1 & 1 \\ 1+3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \det \begin{pmatrix} a+2b & 2a-3b & a+b \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

PROP.7) Se A è una matrice *triangolare* (sono nulli, cioè, tutti gli elementi che si trovano dalla stessa parte rispetto alla diagonale principale) allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{mm}$.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6 \quad (\text{matrice triangolare superiore})$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -15 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 24 \quad (\text{matrice triangolare inferiore})$$

PROP.8) Se in A agli elementi di una linea (riga o colonna) si aggiungono i corrispondenti elementi di una linea parallela, moltiplicati per una stessa costante (positiva o negativa), il valore del determinante di A non cambia.

ESEMPI

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a & 3+5a & 1+4a \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3+b & 1 \\ 1 & 5+4b & 4 \\ 5 & 1+b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5a & 3+a & 1+a \\ 1+5b & 5+b & 4+b \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Nel primo passo alla prima riga abbiamo aggiunto la seconda moltiplicata per a .

Nel secondo passo alla seconda colonna si è aggiunta la terza moltiplicata per b .

Nel terzo passo alla prima riga si è aggiunta la terza per a ed alla seconda riga la terza per b .

Osservazione: la **PROP.8)** può essere utile per il calcolo dei determinanti; si noti, infatti, che dall'identità:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5a & 3+a & 1+a \\ 1+5b & 5+b & 4+b \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

assumendo $a = -3$, $b = -5$ si ha:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-15 & 0 & 1-3 \\ 1-25 & 0 & 4-5 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 0 & -2 \\ -24 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -13 & -2 \\ -24 & -1 \end{vmatrix} = 35$$

Il procedimento di cui sopra consente di trasformare il determinante dato in uno di egual ordine ma con una linea (riga o colonna) fatta di tutti zeri salvo un posto e quindi di ricondurre il calcolo all'ordine inferiore di un grado.

2) Per un minore di ordine più alto si ha, ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2+a & 1+a & 3+a & 1+2a & 1+a \\ -1+b & 5+b & 1+b & 3+2b & 1+b \\ 2+c & -1+c & -2+c & 3+2c & -1+c \\ 3+d & 1+d & 1+d & 2+2d & 1+d \end{vmatrix}$$

Si vede subito che operando, ad esempio, sulla quinta colonna, basta prendere $c = 1$ e $a = b = d = -1$. Si possono prendere in esame anche la prima, la seconda e la terza colonna. Non conviene, invece, considerare la quarta colonna perché, in tal caso, si avrebbe $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$ e $d = -1$ e quindi troppi valori frazionari.

N.B. Nel calcolo pratico si dimentica di ragionare con le lettere a , b , c , d etc. e si opera come nel successivo esempio, verso il quale invitiamo ad attenta riflessione. Si calcoli, pertanto il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Possiamo:

- alla seconda riga togliere la prima

$$1-1 = 0; \quad 3-2 = -1; \quad 1-1 = 0; \quad 4-3 = 1$$

- alla terza riga togliere la prima per 2

$$2-2 = 0; \quad -1-4 = -5; \quad 1-2 = -1; \quad 3-6 = -3$$

- alla quarta riga togliere la prima per 5

$$5-5 = 0; \quad 1-10 = -9; \quad 3-5 = -2; \quad 1-15 = -14$$

Risulta quindi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -2 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 14 \end{vmatrix}$$

Se adesso alla terza colonna togliamo la prima si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

PROP.9) In A la somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di un'altra linea ad essa parallela, è nullo.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

Infatti si ha:

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -22 + 13 + 9 = 0$$

4. OPERAZIONI CON LE MATRICI

Siano A e B due matrici di tipo $m \times k$ ed $h \times n$ rispettivamente.

Definizione 4.1.

A e B si dicono *sommabili* se $m = h$ e $k = n$. Se A e B sono sommabili cioè sono entrambe di tipo $m \times n$ allora si pone:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono entrambe di ordine 3×3 , cioè sommabili, risulta:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+0 \\ 3+1 & 2+2 & 1+0 \\ -1-4 & -1+3 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono sommabili in quanto entrambe di ordine 3×2 , si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -3-1 & 3-2 \\ -4-1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché A è di tipo 3×3 e B è di tipo 2×3 , le due matrici non sono sommabili.

Osservazioni:

- comunque data $A = A_{m \times n}$ e considerata la matrice $O = O_{m \times n}$, risulta:

$$(1) \quad A + O = O + A = A$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

La *matrice nulla*, associata ad A , di ordine tre sarà:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo A ed O sommabili, è facile verificare, sfruttando la *definizione 4.1.*, che la (1) è soddisfatta.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso la *matrice nulla* associata ad A sarà di tipo 2×3 , cioè:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la (1) è verificata.

- Se $-A$ è la matrice ottenuta da A cambiando segno a tutti i suoi elementi si ha:

$$(2) \quad A + (-A) = (-A) + A = 0$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Dunque, utilizzando la *definizione* 4.1., si verifica banalmente la (2).

$$2) A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La verifica della (2) è lasciata, per esercizio, allo studente.

Dal punto di vista delle proprietà delle operazioni, prese comunque tre matrici A, B, C di tipo $m \times n$ fissato, risulta:

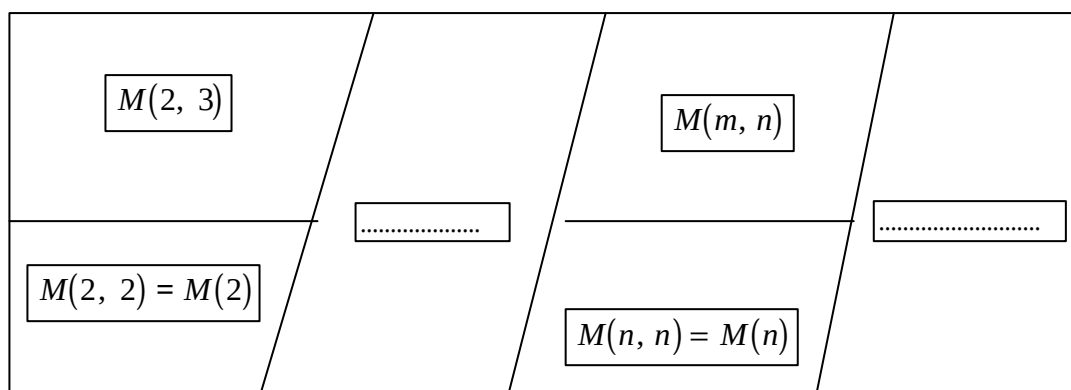
$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{proprietà associativa}$$

$$A + B = B + A \quad \text{proprietà commutativa}$$

Osservazione: nell'insieme M di tutte le matrici, l'operazione (+) di addizione tra matrici è un'operazione *parziale*, cioè non sempre eseguibile. Infatti matrici di egual tipo sono sommabili mentre matrici di diverso tipo non sono (e non potrebbero essere) sommabili (posto a posto). Quanto fino ad ora affermato si può riassumere nel seguente:

Teorema: sia M l'insieme di tutte le matrici; l'insieme M si può ripartire nell'insieme $M(m, n)$ di tutte le matrici di egual tipo ovvero a due a due sommabili; inoltre ciascuna di queste classi $M(m, n)$, corredate con l'addizione tra matrici, costituisce quello che in algebra si chiama *gruppo commutativo* (cfr. *appendice*).

L'enunciato del teorema si può, dunque, schematizzare nel seguente diagramma:

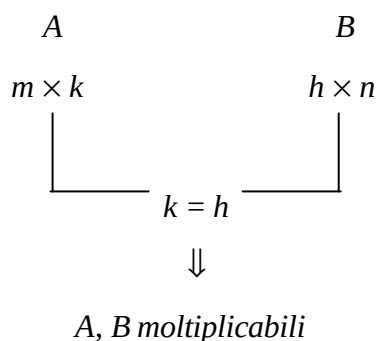


Vogliamo ora provare ad introdurre una seconda *operazione parziale* su M , (parziale in quanto non sempre definita) e precisamente il *prodotto (righe per colonne)* di due matrici. La definizione risulta essere complessa e macchinosa e non si giustifica con l'intuito ma, insieme a tutta la teoria che la circonda, è di grande utilità per le applicazioni. Entriamo nei dettagli.

Siano A e B due matrici di tipo rispettivamente $m \times k$ ed $h \times n$.

Definizione 4.2.

A e B si dicono *conformabili* o *moltiplicabili* se il numero k delle colonne di A eguaglia il numero h delle righe di B . Tale definizione si può, dunque, sintetizzare nel seguente schema :



ESEMPIO 1

Siano

$$A = (a_1 \dots a_i \dots a_n) \quad e \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

rispettivamente una *matrice riga* $1 \times n$ ed una *matrice colonna* $n \times 1$. Allora A è moltiplicabile per X .

Definizione 4.3. (definizione particolare)

Si definisce *prodotto di A per X* la matrice 1×1 data da:

$$AX = a_1x_1 + \dots + a_ix_i + \dots + a_nx_n$$

(prodotto dell'unica riga di A per l'unica colonna di B).

Si può definire anche, ma in modo totalmente differente, il prodotto XA (cfr. **ESEMPIO 3**).

ESEMPIO 2

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} a & b & g \\ a' & b' & g' \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

A è moltiplicabile per B mentre B non è moltiplicabile per A.

Definizione 4.4. (definizione particolare)

In questo caso il prodotto righe per colonne di A per B si definisce ponendo:

$$\begin{array}{c} A \quad \times \quad B \\ \begin{array}{c} | \quad | \\ 2 \times 2 \quad 2 \times 3 \\ | \quad | \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} aa + ba' & ab + bb' & ag + bg' \\ ca + da' & cb + db' & cg + dg' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} AB \\ | \\ 2 \times 3 \end{array}$$

2×3

Si noti che ogni elemento del prodotto è il prodotto di una riga di A per una colonna di B.

Osservazione: se A e B sono conformabili di tipo $m \times k$ ed $h \times n$ con $k = h$ allora il prodotto AB è una matrice opportuna ma di tipo $m \times n$, cioè:

$$\begin{array}{c} A \quad \times \quad B \\ \begin{array}{c} m \times k \quad h \times n \\ | \quad | \\ k = h \\ | \quad | \end{array} \\ m \times n \end{array}$$

ESEMPIO 3

Con riferimento all'**ESEMPIO 1** si ha:

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} (a_1 \dots a_i \dots a_n) = \begin{pmatrix} x_1 a_1 & \dots & x_1 a_i & \dots & x_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i a_1 & \dots & x_i a_i & \dots & x_i a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n a_1 & \dots & x_n a_i & \dots & x_n a_n \end{pmatrix}$$

Definizione 4.5. (definizione generale)

Se A e B sono matrici di tipo rispettivamente $m \times k$ ed $h \times n$ con $k = h$ allora il prodotto AB è una matrice di tipo $m \times n$ della forma:

$$AB = (c_{ij}) \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad j = 1, 2, \dots, n$$

dove l'elemento c_{ij} è il prodotto della riga i -esima di A per la colonna j -esima di B .

In formule si ha:

$$c_{ij} = (a_{i1} \dots a_{ii} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \dots \\ b_{ij} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{ii} b_{ij} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$$

Osservazione: a volte è possibile interpretare la precedente definizione anche nel seguente modo. Date A e B si evidenziano le righe di A e le colonne di B ponendo:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} \quad e \quad B = (B_1 \dots B_j \dots B_n)$$

dove:

$$A_1 = (a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1k}); \dots; A_i = (a_{i1} \dots a_{ii} \dots a_{ik}); \dots; A_m = (a_{m1} \dots a_{mi} \dots a_{mk})$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{j1} \\ \dots \\ b_{k1} \end{pmatrix}; \dots; B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \dots \\ b_{jj} \\ \dots \\ b_{kj} \end{pmatrix}; \dots; B_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \dots \\ b_{jn} \\ \dots \\ b_{kn} \end{pmatrix}$$

Ne segue che:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} (B_1 \dots B_j \dots B_n) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \dots & A_1 B_j & \dots & A_1 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_i B_1 & \dots & A_i B_j & \dots & A_i B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m B_1 & \dots & A_m B_j & \dots & A_m B_n \end{pmatrix}$$

Passiamo ora ad esaminare alcuni esempi concreti.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché A ha ordine 3×2 e B ha ordine 2×4 , il prodotto AB è eseguibile (il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B , cioè A e B sono conformabili). La matrice prodotto avrà pertanto ordine 3×4 . Infatti risulta:

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

dove:

$$c_{11} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6;$$

$$c_{12} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7;$$

$$c_{13} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2;$$

$$c_{14} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7;$$

$$c_{21} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 3;$$

$$c_{22} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 6;$$

$$c_{23} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3;$$

$$c_{24} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 9;$$

$$c_{31} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9;$$

$$c_{32} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8;$$

$$c_{33} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1;$$

$$c_{34} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

Dunque:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 4$

La matrice prodotto sarà, pertanto, di ordine 3×4 (3 è il numero delle righe di A e 4 è il numero delle colonne di B). Dunque si ha:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3×4

Osservazione: si può dimostrare che, quali che siano $A, B, C \in M$ e $I \in \mathfrak{R}$ il prodotto tra matrici gode delle seguenti proprietà:

Teorema (di Binet): $\det(AB) = \det A \det B$ (proprietà che ha molteplici applicazioni)

- $\det(I A) = I^{\text{ord } A} \det A$ (se A è una matrice quadrata)
- *associativa* $(AB)C = A(BC)$
- *distributiva* $A(B + C) = AB + AC$ (a destra)
- $(A + B)C = AC + BC$ (a sinistra)

sotto le ipotesi che tutte le operazioni indicate nelle formule siano eseguibili.

In generale, però, il prodotto tra matrici non è commutativo; infatti se si considerano due matrici $A(m, k)$ e $B(k, n)$ allora AB è sempre possibile (A e B sono conformabili) mentre BA è possibile solo se $m = n$. Tuttavia anche se esistono sia AB che BA non è affatto detto che essi siano eguali.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = (4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1)) = 17$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 5 & (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A (1 \times 3) \quad e \quad B (3 \times 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} AB (1 \times 1) \\ BA (3 \times 3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad AB \neq BA$$

Osservazione: nell'esempio di cui sopra è stato possibile eseguire entrambi i prodotti AB e BA perché il numero delle righe e delle colonne di A era uguale, nell'ordine, al numero delle colonne e delle righe di B ma i prodotti ottenuti sono risultati diversi.

Dunque, in generale, si ha:

$$AB \neq BA$$

$$AB = 0 \quad \text{non implica necessariamente } A = 0 \text{ oppure } B = 0$$

$$AB = AC \quad \text{oppure} \quad BA = CA \quad \text{non implicano necessariamente } B = C$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\Rightarrow A = 0 \text{ oppure } B = 0 \text{ (le matrici } A \text{ e } B \text{ non sono infatti nulle).}$$

$$3) AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ma è evidente che $B \neq C$.

Definizione 4.6.

Data una matrice quadrata A di ordine n si definisce *matrice inversa* di A , e la si indica con A^{-1} , una matrice quadrata di ordine n tale che $AA^{-1} = I$ ed $A^{-1}A = I$.

La determinazione di A^{-1} non è affatto facile e procederemo, per il suo calcolo, seguendo due strade, entrambe interessanti. La prima, *teorica*, conduce ad una formula, mentre la seconda, *pratica*, porta ad un effettivo calcolo.

Enunciamo a tal proposito il seguente

Teorema: data una matrice quadrata A di ordine n , esiste A^{-1} se e solo se

$$\det A \neq 0$$

Osservazioni:

- applicando il *teorema di Binet* alla relazione fondamentale della matrice inversa si ha:

$$\det I = \det (AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = 1$$

e quindi:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

semplice relazione che consente di calcolare il determinante della matrice inversa

- se A è una matrice con $\det A = 0$, allora, come proveremo dalla teoria dei sistemi lineari, esiste sempre una seconda matrice B tale che:

$$AB = 0$$

Due matrici siffatte, cioè due matrici A e B con $A \neq 0$, $B \neq 0$ ma $AB = 0$, si dicono *matrici divisori dello zero*

- se A e B sono due matrici divisori dello zero, dal *teorema di Binet* risulta:

$$\det (AB) = \det A \det B = 0$$

Infatti essendo $A \neq 0$, $B \neq 0$, la condizione $\det B \neq 0$ implicherebbe l'esistenza di B^{-1} per cui risulterebbe $(AB)B^{-1} = 0$ e quindi $A = 0$ mentre, per ipotesi, è $A \neq 0$.

N.B. Dal punto di vista dell'algebra astratta le matrici quadrate di fissato ordine n rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione costituiscono un *anello unitario, non commutativo* nel quale gli elementi sono o invertibili o divisori dello zero (cfr. *appendice*).

Vogliamo ora in dettaglio illustrare i due metodi, precedentemente accennati, che consentono la ricerca dell'inversa di una data matrice.

a) La prima via di calcolo conduce, come già detto, ad una formula che non dimostreremo. Si tratta di ricorrere al calcolo della matrice A^* dei complementi algebrici e quindi applicare la seguente relazione:

$$(3) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

b) La seconda via di calcolo è rappresentata da passi successivi che si possono riassumere come segue:

- si accosta la matrice A alla matrice unità I dello stesso ordine ottenendo la matrice $[A|I]$
- si applicano alla matrice $[A|I]$ opportune operazioni elementari per riga (cfr. paragrafo sulle matrici ridotte) che trasformano la parte di $[A|I]$ occupata da A nella matrice unità I .

A tal punto quando in $[A|I]$ il primo blocco A si è trasformato in I , il secondo blocco I si è trasformato in una nuova matrice che è proprio A^{-1} .

Lo schema da seguire risulta, pertanto, il seguente:

$$\begin{array}{ccc} [A & | & I] \\ \downarrow \begin{array}{l} \text{operazioni} \\ \text{per riga} \end{array} & & \\ [I & | & A^{-1}] \end{array}$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo in primo luogo che $\det A = -1 \neq 0$, cioè la matrice data ammette inversa. Calcoliamo allora A^{-1} utilizzando entrambi i metodi esposti nella precedente osservazione e confrontando poi i risultati ottenuti.

Metodo a)

La matrice A^* dei complementi algebrici associata ad A è data da:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla (3) segue che:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Metodo b)

Affianchiamo ora ad A la matrice unità I del terzo ordine (A ha ordine tre!). Risulta:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$A \qquad I_3$

Bisogna adesso trasformare la matrice A in I_3 attraverso le operazioni elementari sulle righe di A :

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}]$$

$I_3 \qquad A^{-1}$

Si provi ora, per esercizio, che effettivamente risulta $A A^{-1} = I$ ed $A^{-1}A = I$, cioè che la matrice trovata è esattamente l'inversa di A .

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

E' facile verificare che $\det A = -1 \neq 0$. Pertanto A ammette inversa.

Metodo a)

Risulta:

$$(A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Metodo b)

Si ha:

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 10 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right] \\ &\qquad\qquad\qquad I_3 \qquad\qquad A^{-1} \end{aligned}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si noti che $\det A = -12 \neq 0$, cioè esiste A^{-1} .

Metodo a)

Si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & 0 \\ -3 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Metodo b)

Risulta:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$A \qquad I_4$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 - R_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{4}R_4 \end{array}} \end{array} \\
\\
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right] \\
\\
\begin{array}{cc} I_4 & A^{-1} \end{array}
\end{array}$$

5. LO SPAZIO NUMERICO $\mathfrak{R}^n$

Denotiamo con $\mathfrak{R}^n$ l'insieme delle n -uple ordinate di numeri reali. Posto $I = \{1, 2, \dots, n\}$, una n -upla si scriverà nel modo seguente:

$$\underline{a} = (a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

È pertanto possibile considerare una n -upla come un vettore-riga di tipo $1 \times n$.

Quindi se

$$\underline{b} = (b_i)_{i \in I} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

è un'ulteriore n -upla e $l \in \mathfrak{R}$ è un numero reale si definiscono le seguenti due operazioni tra n -uple:

$$1. \underline{a} + \underline{b} = (a_i + b_i)_{i \in I}$$

$$2. l \underline{a} = (l a_i)_{i \in I}$$

Si dice che le operazioni 1. e 2. conferiscono ad $\mathfrak{R}^n$ una *struttura di spazio vettoriale*; inoltre una n -upla si chiama anche *n -vettore* o *vettore riga n -dimensionale*.

Definizione 5.1.

Siano dati n numeri reali $l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$ e si considerino altrettanti vettori n -dimensionali $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$. In base alle operazioni sopra indicate (1. e 2.) si può costruire il vettore:

$$\underline{b} = l_1 \underline{a}_1 + \dots + l_i \underline{a}_i + \dots + l_n \underline{a}_n$$

detto *combinazione lineare* dei vettori $\underline{a}_i$ mediante i numeri l_i .

Si consideri ora un insieme di vettori n -dimensionali $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$. Denotiamo con $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle$ l'insieme di tutti i vettori $\underline{u}$ tali che:

$$\underline{u} = l_1 \underline{a}_1 + \dots + l_i \underline{a}_i + \dots + l_n \underline{a}_n$$

cioè:

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle = \{ l_1 \underline{a}_1 + \dots + l_i \underline{a}_i + \dots + l_n \underline{a}_n \mid l_1, \dots, l_i, \dots, l_n \in \mathbb{R} \}$$

Definizione 5.2.

Lo spazio $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle$ si chiama *spazio vettoriale generato da un insieme di vettori*.

Siamo ora interessati a risolvere la seguente *equazione vettoriale*:

$$(*) \quad l_1 \underline{a}_1 + \dots + l_i \underline{a}_i + \dots + l_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

dove i l_i sono variabili, gli $\underline{a}_i$ vettori assegnati e le soluzioni sono le n -uple $\underline{l} = (l_1, \dots, l_i, \dots, l_n)$.

Si osservi subito che, poiché risulta

- $0 \underline{l} = (0 l_1, \dots, 0 l_i, \dots, 0 l_n) = (0, \dots, 0, \dots, 0) = \underline{0}$
- $l \underline{0} = (l 0, \dots, l 0, \dots, l 0) = (0, \dots, 0, \dots, 0) = \underline{0}$

l'equazione $(*)$ ammette sempre la soluzione $(l_1, \dots, l_i, \dots, l_n) = (0, \dots, 0, \dots, 0)$ ovvero $\underline{l} = \underline{0}$, detta *soluzione nulla* o *banale*.

Definizione 5.3.

Dato l'insieme degli n vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ possiamo distinguere i seguenti due casi:

- a) i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono tali che l'equazione $(*)$, con essi costruita nelle variabili $\underline{l}$, ammette *soltanto* la soluzione nulla $\underline{l} = \underline{0}$. In questo caso gli n vettori si dicono *linearmente indipendenti*.
- b) i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono tali che l'equazione $(*)$, oltre alla soluzione nulla, che esiste sempre, ne ammette altre (necessariamente infinite) che non sono nulle. In questo caso gli n -vettori si dicono *linearmente dipendenti*.

Si dimostra, a tal proposito, il seguente:

Teorema: n vettori n -dimensionali $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono *linearmente indipendenti* se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \neq 0$$

ESEMPI

1) Le terne $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$ sono linearmente indipendenti; infatti, in base al teorema precedente, si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ragionando direttamente risulta:

$$l(1, 2, 3) + m(2, 1, 2) + n(3, 2, 1) = (l + 2m + 3n, 2l + m + 2n, 3l + 2m + n) = (0, 0, 0)$$

per:

$$\begin{cases} l + 2m + 3n = 0 \\ 2l + m + 2n = 0 \\ 3l + 2m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l + 2m + 3n = 0 \\ -3m - 4n = 0 \\ -4m - 8n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l + 2m + 3n = 0 \\ 3m + 4n = 0 \\ m + 4n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l + 2m + 3n = 0 \\ 8n = 0 \\ m + 4n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Dunque il sistema ammette *solo* la soluzione nulla ed i tre vettori sono *linearmente indipendenti*.

2) Le quaterne $(1, 2, 3, -1)$, $(2, 1, 3, 4)$, $(4, 5, 9, 2)$ sono linearmente dipendenti; infatti:

$$2(1, 2, 3, -1) + (2, 1, 3, 4) - (4, 5, 9, 2) = (2 + 2 - 4, 4 + 1 - 5, 6 + 3 - 9, -2 + 4 - 2) = (0, 0, 0, 0)$$

cioè esiste una terna di numeri $l = 2, m = 1, n = -1$ non nulli soddisfacenti la (*).

Osservazione: sia data una n -upla $\underline{l} = (l_1, \dots, l_i, \dots, l_n) \neq \underline{0}$ tale che:

$$l_1 \underline{a}_1 + \dots + l_i \underline{a}_i + \dots + l_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

Se uno dei l_i è diverso da zero (ad esempio $l_1 \neq 0$) allora si può esprimere $\underline{a}_1$ in funzione dei rimanenti $\underline{a}_i$, essendo:

$$\underline{a}_1 = \left(-\frac{l_2}{l_1}\right)\underline{a}_2 + \dots + \left(-\frac{l_i}{l_1}\right)\underline{a}_i + \dots + \left(-\frac{l_n}{l_1}\right)\underline{a}_n$$

Definizione 5.4.

Un insieme di n vettori si dice che forma una *base* per uno spazio vettoriale se:

- a) i vettori sono linearmente indipendenti
- b) ogni vettore dello spazio è combinazione lineare dei rimanenti n vettori dati

Se ora poniamo:

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0); \dots; \underline{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0); \dots; \underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

allora sussiste la seguente identità:

$$(**) \quad \underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_i \underline{e}_i + \dots + a_n \underline{e}_n$$

poiché risulta:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, a_i, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) = \\ &= a_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + a_i (0, \dots, 1, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1) = \\ &= a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_i \underline{e}_i + \dots + a_n \underline{e}_n \end{aligned}$$

La $(**)$ prova, dunque, che:

- $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i, \dots, \underline{e}_n$ sono linearmente indipendenti; infatti:

$$a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_i \underline{e}_i + \dots + a_n \underline{e}_n = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = (0, \dots, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \in I$$

- un qualsiasi vettore $\underline{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ è combinazione lineare degli $\underline{e}_i$, per $i \in I$.

Segue che l'insieme $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i, \dots, \underline{e}_n\}$ forma una base detta *base naturale* o *canonica* di $\mathfrak{R}^n$.

E' facile provare, infine, che due differenti basi (finite) hanno lo stesso numero di elementi e tale numero rappresenta la *dimensione* dello spazio. Dunque $\mathfrak{R}^n$ ha esattamente dimensione pari ad n .

Osservazione: quanto fino ad ora affermato per i vettori-riga si può ripetere in maniera analoga per i vettori-colonna potendoli scrivere sotto la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. RANGO DI UNA MATRICE

Iniziamo il paragrafo con una serie di osservazioni.

Data una matrice A di tipo $m \times n$ è possibile estrarre da essa sottomatrici quadrate delle quali possiamo, teoricamente, calcolare i rispettivi determinanti, detti *minori*.

Dividiamo le sottomatrici di A in due categorie:

- (1) quelle con determinante nullo
- (2) quelle con determinante non nullo

In generale se m è il più piccolo tra i due numeri m ed n si può verificare che

- non tutti i minori di ordine massimo m siano nulli; in tal caso si dirà che A ha *caratteristica* m
- i minori estratti di ordine m siano tutti nulli e così anche quelli di ordine $m-1$ e così via fino ad un ordine $p < m$; si dirà allora che la *caratteristica* di A è p .

Possiamo ora dare la seguente

Definizione 6.1.

Si chiama *caratteristica* $k(A)$ di una matrice A l'ordine massimo dei minori, estraibili da A , non nulli.

In sintesi $k(A) = p$ se e solo se:

- in A esiste un minore di ordine p non nullo
- ogni minore di A di ordine superiore a p è nullo

Dunque:

$$0 \leq k(A) \leq \min \{ m, n \}$$

Risulta pertanto:

- $k(A) = 0$ se e solo se $A = 0$ (cioè A è la matrice nulla)
- $k(A) = 1$ se tutti i minori del secondo ordine sono nulli

Definizione 6.2.

Si chiama *rango per riga* $r(A)$ di una matrice A il massimo numero di righe di A che sono linearmente indipendenti.

Definizione 6.3.

Si chiama *rango per colonna* $r'(A)$ di una matrice A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti contenute in A .

Sussiste, per queste nozioni, il seguente

Teorema (fondamentale del rango): se A è una matrice di tipo $m \times n$, allora:

$$k(A) = r(A) = r'(A)$$

cioè la caratteristica di una matrice A eguaglia il rango per righe ed il rango per colonne.

D'ora in avanti, per comodità, useremo solo il simbolo $r(A)$ chiamandolo semplicemente *rango di una matrice*.

Osservazione: la nozione di rango si lega anche a quella di spazio generato in quanto si dimostra che:

$$\dim \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle = r[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n]$$

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

In primo luogo osserviamo che $0 \leq r(A) \leq \min \{ m, n \} = \min \{ 2, 3 \} = 2$. Quindi bisogna adesso considerare un minore del secondo ordine estraibile da A non nullo. Sia esso, per esempio,

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Risulta, come è facile verificare, } A' = -1 \neq 0. \text{ Poiché non esistono in } A \text{ minori di}$$

ordine maggiore di due, segue che $r(A) = 2$.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come nel precedente esempio, risulta $0 \leq r(A) \leq \min \{ m, n \} = \min \{ 3, 3 \} = 3$. Si osservi che in questo caso l'unico minore del terzo ordine estraibile da A è proprio A . Poiché $\det A = 0$ (la verifica è lasciata allo studente, per esercizio) risulta $r(A) \neq 3$. Vediamo ora se è $r(A) = 2$. Un minore del secondo ordine estraibile da A è, ad esempio, $A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. Poiché $A' = -2 \neq 0$ e tutti i minori di ordine maggiore di due sono nulli, risulta $r(A) = 2$.

$$3) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Risulta innanzitutto $0 \leq r(A) \leq \min \{ m, n \} = \min \{ 3, 4 \} = 3$. Andiamo pertanto a calcolare *tutti* i minori del terzo ordine estraibili da A , cioè:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Si osservi che tali determinanti sono *tutti* nulli perché gli elementi della prima e terza riga di A sono proporzionali. Segue che $r(A) \neq 3$. Poiché $A' = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ e tutti i minori di ordine maggiore di due, estraibili da A , sono nulli, si conclude immediatamente che $r(A) = 2$.

Definizione 6.4.

Se A è la matrice nulla, cioè in essa tutti gli elementi sono nulli, si dice che $r(A) = 0$.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(A) = 0$$

Osservazione: dati $m < n$ vettori $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$ di $\mathfrak{R}^n$, essi sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

contiene un minore di ordine massimo non nullo.

ESEMPI

1) I vettori $(3, 2, -5)$ e $(1, -2, 1)$ sono linearmente indipendenti; risulta inoltre $m = 2 < n = 3$.

La matrice ad essi associata è:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto un minore di ordine massimo, cioè due, estraibile da A non nullo è dato, ad esempio, da:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Dalla precedente osservazione segue, dunque, la lineare indipendenza dei due vettori considerati.

Analogamente sfruttando la *definizione* 5.3. si ha:

$$l(3, 2, -5) + m(1, -2, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3l + m = 0 \\ 2l - 2m = 0 \\ -5l + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3l + m = 0 \\ 8l = 0 \\ -5l + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = 0 \end{cases}$$

c.v.d.

2) I vettori $(1, -2, 3, 1)$, $(3, 0, -1, 0)$ e $(2, -1, 0, 2)$ sono linearmente indipendenti. La matrice con essi costruita è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dalla quale è possibile estrarre un minore di ordine massimo tre non nullo, cioè:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Del resto dalla *definizione* 5.3. risulta:

$$l(1, -2, 3, 1) + m(3, 0, -1, 0) + n(2, -1, 0, 2) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} l + 3m + 2n = 0 \\ -2l - n = 0 \\ 3l - m = 0 \\ l + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l + 3m + 2n = 0 \\ 2l + n = 0 \\ 3l - m = 0 \\ 3l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

c.v.d.

3) I vettori $(-1, 3, 2, 5)$, $(6, -2, 4, 3)$ e $(-2, 6, 4, 10)$ sono linearmente dipendenti. La matrice ad essi associata è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Si osservi che i quattro minori del terzo ordine estraibili da questa matrice sono *tutti* nulli, perchè gli elementi della prima e terza riga sono proporzionali.

Infatti, dalla *definizione* 5.3., segue:

$$l(-1, 3, 2, 5) + m(6, -2, 4, 3) + n(-2, 6, 4, 10) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} -l + 6m - 2n = 0 \\ 3l - 2m + 6n = 0 \\ 2l + 4m + 4n = 0 \\ 5l + 3m + 10n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = 6m - 2n \\ m = 0 \\ 2l + 4n = 0 \\ 5l + 10n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = -2 \\ m = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

c.v.d.

7. UN CRITERIO PRATICO PER CALCOLARE LA CARATTERISTICA DI UNA

MATRICE: IL TEOREMA DI KRONECKER O DEGLI ORLATI

È evidente che il calcolo del rango (o caratteristica) diventa abbastanza laborioso quando ci si trova di fronte ad una matrice A di ordine $m \times n$ con m ed n abbastanza grandi. In tal caso, quindi, si cerca di ottimizzare il calcolo ricorrendo ad un metodo più *rapido* derivante dal cosiddetto *teorema di Kronecker*.

Premettiamo, a tal proposito, la seguente

Definizione 7.1.

Sia A' un minore di ordine p estratto da A . Si definisce *minore orlato* di A' un qualsiasi minore di A , di ordine $p+1$, ottenuto da A' aggiungendo una riga ed una colonna qualsiasi di A .

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo, pertanto, un minore del secondo ordine estraibile da A . Sia esso, per esempio,

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

I minori orlati di A' sono:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si consideri un minore del terzo ordine estraibile da A ; sia esso, per esempio, $A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

L'unico minore orlato di A' è proprio A .

Si può dimostrare il seguente

Teorema (di Kronecker): $r(A) = r$ se e solo se esiste un minore A' , di ordine r , non nullo e tutti i minori orlati di A' (se esistono) sono nulli.

Riassumendo, per calcolare la caratteristica di una data matrice A si può procedere in uno dei seguenti due modi:

Primo metodo

Sia $p = \min \{ m, n \}$. Come osservato nel paragrafo precedente risulta $0 \leq r(A) \leq p$. Allora:

- 1) si esaminano (*tutti*) i minori di A di ordine p ; se uno di essi è diverso da zero, risulta $r(A) = p$; se, invece, *tutti* i minori di ordine p sono nulli, allora
- 2) si esaminano (*tutti*) i minori di A di ordine $p-1$; se uno di essi è diverso da zero risulta $r(A) = p-1$; se invece tutti i minori di ordine $p-1$ sono nulli, allora
- 3) si esaminano (*tutti*) i minori di A di ordine $p-2$; se uno di essi è diverso da zero risulta $r(A) = p-2$; etc.

Secondo metodo

- 1) si determina un qualsiasi minore, generalmente del secondo ordine, A' di A diverso da zero; se A' è di ordine p , si ha $r(A) \geq p$; quindi
- 2) si esaminano i minori orlati di A' ; se questi sono tutti nulli, allora risulta $r(A) = p$; se, invece, uno di essi (per esempio A'') è diverso da zero, allora
- 3) si esaminano i minori orlati di A'' , ecc.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Risulta $p = \min \{ m, n \} = 3$. Pertanto si ha $0 \leq r(A) \leq 3$.

Primo metodo

Esaminiamo i minori di A di ordine tre; osserviamo che l'unico minore di A del terzo ordine è A stesso. Poiché $\det A = 0$ risulta $r(A) < 3$. Consideriamo, pertanto, i minori di ordine $p-1 = 2$ estraibili da A .

Poiché $A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, si ha $r(A) = 2$.

Secondo metodo

Consideriamo un minore del secondo ordine estraibile da A diverso da zero; sia esso

$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Allora risulta $r(A) \geq 2$; l'unico minore orlato di A' è A . Poiché $\det A = 0$ segue che $r(A) = 2$.

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo in primo luogo che deve essere $0 \leq r(A) \leq 4$.

Primo metodo

L'unico minore del quarto ordine estraibile da A è A . Essendo $\det A = 0$ segue che $r(A) < 4$; analizziamo tutti i minori del terzo ordine che si possono estrarre da A .

Poiché $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ segue immediatamente che $r(A) = 3$.

Secondo metodo

Consideriamo un minore del secondo ordine estraibile da A diverso da zero; sia $A' = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Analizziamo adesso tutti i minori orlati di A' . Risulta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

Poiché abbiamo trovato un minore orlato del terzo ordine diverso da zero, possiamo affermare che $r(A) = 3$.

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta $0 \leq r(A) \leq 3$.

Primo metodo

Consideriamo tutti i minori del terzo ordine di A . Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque $r(A) < 3$ (tutti i minori del terzo ordine sono nulli). Poiché, ad esempio, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$,

segue che $r(A) = 2$.

Secondo metodo

Consideriamo $A' = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; il minore preso in esame è diverso da zero. Andiamo quindi ad analizzare

tutti gli orlati di A' . Essi sono esattamente due, cioè:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché tutti i minori orlati del terzo ordine di A sono nulli segue che $r(A) = 2$.

Osservazione: da quest'ultimo esempio risulta evidente come il teorema di *Kronecker* garantisca un risparmio di calcoli: con il primo metodo, infatti, siamo stati costretti a calcolare ben quattro determinanti del terzo ordine; con il *teorema degli orlati*, invece, è stato sufficiente calcolarne due.

8. MATRICI RIDOTTE

Sia A una qualunque matrice di ordine $m \times n$.

Definizione 8.1.

A si definisce *matrice ridotta (per righe)* se in essa ogni riga, che non sia tutta nulla, possiede un elemento *speciale* $a_{ij} \neq 0$ al di sotto del quale gli elementi sono tutti nulli.

ESEMPI

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice ridotta } 4 \times 4$$

Gli elementi $a_{11} = 3$, $a_{23} = 1$, $a_{32} = 1$ sono gli elementi *speciali* rispettivamente della prima, seconda e terza riga.

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice ridotta } 3 \times 4$$

Gli elementi $a_{11} = 1$, $a_{22} = 3$ sono gli elementi *speciali* rispettivamente della prima e seconda riga.

$$3) C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ -6 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice ridotta } 4 \times 5$$

Gli elementi $a_{12} = 2$, $a_{23} = 1$, $a_{34} = 5$ sono gli elementi *speciali* rispettivamente della prima, seconda e terza riga.

Osservazione: se A è una matrice ridotta allora il numero delle righe di A , non tutte nulle, è uguale al rango di A .

Se A non è una matrice ridotta, allora la si può ridurre applicando le seguenti *operazioni elementari* sulle sue righe:

1) ad una riga si sommano gli elementi di un'altra riga moltiplicati per un numero $k \neq 0$, cioè:

$$R_i \rightarrow R_i + kR_j \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m$$

2) si scambiano tra loro due righe, cioè:

$$R_i \leftrightarrow R_j \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

3) si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per un numero $k \neq 0$, cioè:

$$R_i \rightarrow kR_i \quad (k \neq 0) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Si noti che effettuando una o più *riduzioni* del tipo 1), 2), 3), si ottiene da A una nuova matrice B tale che sia $r(A) = r(B)$. Dunque i suddetti criteri di riduzione di una matrice si riveleranno particolarmente utili quando si dovrà determinare la sua caratteristica e, come vedremo in seguito, anche nella risoluzione dei sistemi lineari.

ESEMPI

1) Calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si può osservare che A non è una matrice ridotta per cui occorre applicare i criteri di riduzione sopra esposti. Si ha:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 5 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 5 \\ 0 & -5 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 - R_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Dunque la matrice B è ridotta per cui $r(A) = r(B) = 2$.

2) Calcolare la caratteristica di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_5 \\ R_5 \rightarrow R_5 + R_4}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 + R_2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Dunque B è una matrice ridotta in cui sono nulle solo due righe per cui $r(A) = r(B) = 3$.

3) Determinare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 7 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & 4 & 30 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Poiché B è una matrice ridotta segue che $r(A) = r(B) = 4$.

Osservazione: lo studente provi a calcolare, per esercizio, il determinante di A ed osservi che $\det A = 12 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 4$.

9. MATRICI RETTANGOLARI INVERSE

Il problema dell'inversione di una matrice, come già osservato, si pone generalmente per matrici quadrate. Scopo di questo paragrafo è di estendere il suddetto problema alle matrici rettangolari di dimensione non superiore a tre. Esamineremo, pertanto, il caso rettangolare definendo il prodotto e la somma tra matrici come fatto in precedenza per il caso quadrato.

Date due matrici A , di tipo 2×3 , X , di tipo 3×2 , ed indicata con I_2 la matrice identica 2×2 ci poniamo il problema di risolvere l'equazione

$$AX = I_2$$

supposto che A sia costituita da elementi noti ed X da elementi incogniti. La soluzione X dell'equazione matriciale fornirà, dunque, un'inversa destra di A .

Per ottenere un'inversa sinistra ci poniamo, invece, il problema di risolvere l'equazione

$$YA = I_3$$

dove Y è una matrice di tipo 3×2 ed I_3 è la matrice identica 3×3 .

Osservazione: le matrici X ed Y , se esistono entrambe, non coincidono, in quanto sono di tipo differente.

Analogamente, si può affrontare il problema relativo all'esistenza di divisori dello zero.

Definizione 9.1.

Sia a un elemento di un anello, con $a \neq 0$. Diremo che a è *divisore dello zero* se esiste $b \neq 0$, anch'esso nell'anello, tale che $ab = 0$.

In tal caso, quindi, data A matrice di tipo 2×3 , X matrice di tipo 3×2 , ci si pone il problema di risolvere l'equazione matriciale

$$AX = O_2$$

con O_2 matrice nulla di tipo 2×2 .

Inoltre, data Y matrice di tipo 3×2 , al contrario, ci si pone il problema di risolvere

$$YA = O_3$$

con O_3 matrice nulla di tipo 3×3 .

Dunque per le matrici di ordine non superiore a tre valgono i seguenti teoremi.

Teorema 1 : data una matrice 2×3 essa possiede matrice inversa destra se e solo se ha rango massimo.

Dimostrazione:

$$\text{Data } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \text{ si vuole determinare una matrice } X = \begin{bmatrix} u & u' \\ v & v' \\ w & w' \end{bmatrix} \text{ tale che } AX = I_2.$$

Consideriamo i seguenti due casi:

a) $r(A) = 1 \Rightarrow$ l'inversione non è possibile

Infatti se il rango è uno, allora le due righe della matrice A sono linearmente dipendenti, cioè $a' = k a$, $b' = k b$, $c' = k c$.

Quindi l'equazione matriciale $AX = I_2$ è equivalente ai due sistemi

$$(1) \quad \begin{cases} au + bv + cw = 1 \\ k au + k bv + k cw = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} au' + bv' + cw' = 0 \\ k au' + k bv' + k cw' = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda di (1), confrontata con la prima, segue che $k = 0$; confrontando in maniera analoga le due equazioni del sistema (2) segue che $k = 1$: *assurdo*, cioè i due sistemi non sono contemporaneamente risolvibili.

b) $r(A) \neq 1 \Rightarrow$ l'inversione è possibile

Supponiamo, quindi, che ci sia un minore di ordine due non nullo; sia esso, ad esempio, costituito dalle prime due colonne di A .

Allora l'equazione $AX = I_2$ è equivalente ai seguenti due sistemi:

$$(1) \quad \begin{cases} au + bv + cw = 1 \\ a'u + b'v + c'w = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} au' + bv' + cw' = 0 \\ a'u' + b'v' + c'w' = 1 \end{cases}$$

Si osservi che, portando cw al secondo membro del sistema (1), si ottiene un sistema risolubile con la regola di Cramer, supposto che il minore $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ non sia nullo.

Pertanto la soluzione del sistema (1) è data da:

$$u = \frac{b' + w(bc' - cb')}{|A|} \quad e \quad v = \frac{-a' + w(ca' - ac')}{|A|}$$

$$\text{con } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Applicando lo stesso procedimento al sistema (2) si ha:

$$u' = \frac{w'(c'b - cb') - b}{|A|} \quad e \quad v' = \frac{a + w'(a'c - c'a)}{|A|}$$

$$\text{con } B = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, |C| = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}.$$

Dunque la soluzione dell'equazione matriciale $AX = I_2$ è:

$$X = \frac{\begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{|A|} + \frac{w \begin{bmatrix} |B| & 0 \\ |C| & 0 \\ |A| & 0 \end{bmatrix}}{|A|} + \frac{w' \begin{bmatrix} 0 & |B| \\ 0 & |C| \\ 0 & |A| \end{bmatrix}}{|A|}$$

Teorema 2: l'equazione $XA = I_3$, dove X è 3×2 , A è 2×3 ed I_3 è la matrice identica 3×3 non è risolubile.

Dimostrazione:

L'equazione data è equivalente ai sistemi

$$(1) \quad \begin{cases} au + a'u' = 1 \\ bu + b'u' = 0 \\ cu + c'u' = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} av + a'v' = 0 \\ bv + b'v' = 1 \\ cv + c'v' = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} aw + a'w' = 0 \\ bw + b'w' = 0 \\ cw + c'w' = 1 \end{cases}$$

Se il sistema $XA = I_3$ è risolubile, allora $|A| = |B| = |C| = 0$, cioè $r(A) \leq 1$.

Ma allora, considerando il sistema (1), si ha:

$$\begin{cases} u + k u' = \frac{1}{a} \\ b(u + k u') = 0 \\ c(u + k u') = 0 \end{cases}$$

Segue che $a \neq 0, b = c = 0$: in contraddizione con il sistema (2).

Teorema 3: data una matrice A di tipo 2×3 , essa ammette divisori dello zero a destra se ha rango pari ad uno.

Viceversa se A ha rango due, allora la matrice X tale che $AX = 0$ deve avere rango uno.

Dimostrazione:

Se $r(A) = 1$, allora $AX = 0$ implica $a' = k a, b' = k b, c' = k c$ e quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} au + bv + cw = 0 \\ au' + bv' + cw' = 0 \end{cases}$$

che è risolubile.

Se $r(A) = 2$ allora l'equazione $AX = 0$ è equivalente ai due sistemi

$$(1) \quad \begin{cases} au + bv + cw = 0 \\ a'u + b'v + c'v = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} au' + bv' + cw' = 0 \\ a'u' + b'v' + c'v' = 0 \end{cases}$$

Pertanto, portando le incognite w, w' al secondo membro, i due sistemi sono risolubile con *Cramer*.

Adottando le notazioni del *teorema 1*, risulta:

$$u = \frac{|B|}{|A|} w; \quad u' = \frac{|B|}{|A|} w'; \quad v = \frac{|C|}{|A|} w; \quad v' = \frac{|C|}{|A|} w'$$

Quindi, la matrice X presenterà due colonne linearmente dipendenti e, allora, avrà rango uno, cioè la soluzione dell'equazione $AX = 0$ è:

$$X = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |B| w & |B| w' \\ |C| w & |C| w' \\ |A| w & |A| w' \end{bmatrix}$$

Teorema 4: date le matrici X di ordine 3×2 , A di tipo 2×3 ed O_3 matrice nulla 3×3 , l'equazione $XA = O_3$ è risolubile se e solo se $r(A) = 1$.

Dimostrazione:

L'equazione matriciale $XA = O_3$ è equivalente a tre sistemi (fra di loro equivalenti) raggruppabili nel seguente sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} au + a'u' = 0 \\ bu + b'u' = 0 \\ cu + c'u' = 0 \end{cases}$$

Se la soluzione di uno di essi esiste, allora $r(A) = 1$. Viceversa, se $r(A) = 1$ allora risulta $a' = k a$, $b' = k b$, $c' = k c$.

Dunque il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} a(u + k u') = 0 \\ b(u + k u') = 0 \\ c(u + k u') = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$u + k u' = 0$$

$$v + k v' = 0$$

$$w + k w' = 0$$

Dunque la matrice X , di rango uno, è soluzione dell'equazione $XA = O_3$.

APPENDICE

Sia dato un insieme $A \neq \emptyset$.

Definizione

Se $\bullet$ è una funzione definita sul prodotto cartesiano $A \times A$ a valori in A , allora diremo che $\bullet$ è un'operazione *binaria* in A .

1. SEMIGRUPPI

Definizione 1.1.

Una coppia $(G, \bullet)$, dove G è un insieme non vuoto e $\bullet$ è un'operazione binaria interna di G , si dice *semigrupp* se:

$$\forall a, b, c \in G \Rightarrow a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c \quad \text{proprietà associativa}$$

Definizione 1.2.

Se G è un semigrupp, si chiama *elemento neutro (bilatero)* di G ogni elemento $u \in G$ tale che:

$$\forall a \in G \Rightarrow u \bullet a = a \bullet u = a$$

Definizione 1.3.

Se un semigrupp G possiede l'elemento neutro, allora G si dice semigrupp *unitario*.

Definizione 1.4.

Se G è un semigrupp unitario, diremo che $a' \in G$ è un *simmetrico* di $a \in G$ se:

$$a \bullet a' = a' \bullet a = u$$

Osservazione: si dimostra che in ogni semigrupp unitario esiste un unico elemento neutro e $\forall a \in G$ esiste un unico simmetrico.

Definizione 1.5.

Un semigrupp G si dice *commutativo* o *abeliano* se l'operazione definita su G gode della seguente proprietà:

$$\forall a, b \in G \Rightarrow a \bullet b = b \bullet a \quad \text{proprietà commutativa}$$

ESEMPI

1) $(\mathbb{N}, +)$ ed $(\mathbb{N}, \cdot)$ cioè l'insieme dei numeri naturali, rispetto all'operazione sia di addizione che di moltiplicazione, è un semigrupp commutativo unitario. Lo stesso discorso ovviamente vale anche per gli insiemi dei numeri interi relativi, dei numeri razionali, dei numeri reali e dei numeri complessi.

2) $(\mathcal{P}(A), \cup)$ e $(\mathcal{P}(A), \cap)$ cioè l'insieme delle parti di $A \neq \emptyset$, rispetto alle operazioni di unione ed intersezione, è un semigrupp commutativo unitario ($\emptyset$ è l'elemento neutro dell'unione ed A è l'elemento neutro dell'intersezione; gli unici elementi invertibili, come è facile provare per esercizio, in entrambi i casi, sono gli elementi neutri).

2. GRUPPI

Definizione 2.1.

Si dice *gruppo* una coppia ordinata $(G, \bullet)$, dove $\bullet$ è un'operazione binaria interna definita sull'insieme non vuoto G , tale che:

- a) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ *proprietà associativa*
- b) $\forall a \in G \Rightarrow u \bullet a = a \bullet u = a$ *esistenza dell'elemento neutro*
- c) $\forall a \in G \exists a' \in G \Rightarrow a \bullet a' = a' \bullet a = u$ *esistenza dell'elemento simmetrico*

Definizione 2.2.

Un gruppo G si dice *commutativo* o *abeliano* se:

$$\forall a, b \in G \Rightarrow a \bullet b = b \bullet a \quad \text{proprietà commutativa}$$

ESEMPI

1) $(\mathbb{Z}, +)$, cioè l'insieme dei numeri relativi con l'addizione, forma un gruppo commutativo. Sono gruppi commutativi anche le seguenti strutture: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$. [Naturalmente in questi casi l'elemento neutro è lo zero ed il simmetrico è l'opposto].

2) $(\mathbb{Q}_0, \cdot)$, cioè l'insieme dei numeri razionali (le frazioni) non nulli con la moltiplicazione, forma un gruppo commutativo. Anche la struttura $(\mathbb{R}_0, \cdot)$ costituisce un gruppo abeliano. [Naturalmente l'elemento neutro è il numero 1 ed il simmetrico è l'inverso].

3) $(V = \mathfrak{R}^n, +)$, cioè l'insieme dei vettori ad n coordinate dotato dell'operazione di addizione, è un gruppo abeliano. [Naturalmente l'elemento neutro è la n -upla nulla ed il simmetrico di un vettore $v \in V$ è il suo opposto $-v \in V$].

4) $(M(m, n), +)$, cioè l'insieme delle matrici di tipo (m, n) , con l'operazione di addizione tra matrici, è un gruppo commutativo. [Naturalmente l'elemento neutro è la matrice nulla ed il simmetrico di $A \in M(m, n)$, in questa struttura, è la matrice opposta $-A$, ottenuta da A cambiando il segno a tutti i suoi elementi].

5) $(M^*(n), \cdot)$, cioè l'insieme delle matrici quadrate di ordine n con la moltiplicazione, costituisce un gruppo non commutativo. In questo caso l'elemento neutro è la matrice identica I_n ed il simmetrico di una matrice A è l'inversa A^{-1} .

Da notare che la struttura $(M(n), \cdot)$, cioè l'insieme di *tutte* le matrici quadrate di ordine n (ossia comprese anche quelle con determinante nullo), costituiscono un semigrupp unitario non commutativo, ma non un gruppo poiché gli elementi con determinante nullo *non* sono invertibili.

Si noti ancora che $(M(1), +, \cdot)$ è, di fatto, isomorfo all'insieme dei numeri reali.

3. ANELLI

Definizione 3.1.

Chiameremo *anello* una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ tale che:

1) $(A, +)$ è un gruppo abeliano, cioè:

- a) $\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *proprietà associativa*
- b) $\forall a \in A \quad u \cdot a = a \cdot u = a$ *esistenza dell'elemento neutro*
- c) $\forall a \in A \quad \exists a' \in G : a \cdot a' = a' \cdot a = u$ *esistenza dell'elemento simmetrico*
- d) $\forall a, b \in A \quad a \cdot b = b \cdot a$ *proprietà commutativa*

Osservazione: chiaramente indicheremo l'elemento neutro u con 0 e l'opposto di un qualunque elemento $a \in A$ con $-a$.

2) $(A, \cdot)$ è un semigrupp, cioè:

- a) $\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *proprietà associativa*
- b) $\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
proprietà distributiva della legge $\cdot$ rispetto alla legge $+$
- c) $\forall a, b, c \in A \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Osservazione: per comodità l'elemento $a \bullet b$ verrà indicato semplicemente con ab ; l'elemento neutro u con 1 ed il simmetrico (nel caso specifico l'inverso) di un qualunque elemento $a \in A$ con a^{-1} .

Definizione 3.2.

Un anello $(A, +, \bullet)$ si dice *commutativo* o *abeliano* se $(A, \bullet)$ è un semigrupp commutativo, cioè:

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a \bullet b = b \bullet a \quad \text{proprietà commutativa}$$

Definizione 3.3.

Un anello $(A, +, \bullet)$ si dice *unitario* se possiede un elemento neutro (necessariamente unico) e , cioè tale che:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \bullet e = e \bullet a = a$$

Sia $(A, +, \bullet)$ un anello unitario. Se, fissato $a \in A$ esiste un elemento a^{-1} tale che:

$$a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$$

l'elemento a si dice *invertibile* o che è una *unità*.

Osservazione: in un anello unitario $(A, +, \bullet)$ l'insieme U degli elementi invertibili non è vuoto avendosi, come è ovvio:

$$e \in U$$

Si ha anche la seguente

Proprietà: la struttura $(U, \cdot)$ è un gruppo (dentro l'anello), detto *gruppo delle unità*.

Breve prova:

Se $a, b \in U$ risulta che $a^{-1}, b^{-1} \in U$ per essere $(a^{-1})^{-1} = a \in U$ e $a \cdot b \in U$ in quanto esiste $(ab)^{-1}$ ed è $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Quindi $(U, \cdot)$ è associativo, $e \in U$ ed il prodotto di due elementi è invertibile.

Definizione 3.4.

Un anello unitario e commutativo $(A, +, \bullet)$ nel quale vale la *legge di annullamento del prodotto*, cioè:

$$a \bullet b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

si dice *dominio d'integrità* o *anello integro*.

Osservazione : in un anello $(A, +, \bullet)$ il prodotto di due elementi è sempre nullo se uno dei due fattori è nullo; si noti, invece, che il viceversa è falso, cioè può capitare che in un anello il prodotto ab sia nullo ma risultino diversi da zero sia a che b : in tal caso a e b si dicono *divisori dello zero*.

ESEMPI

1) Esiste un unico anello detto *anello mono-elemento* costituito da un solo elemento, cioè $A = \{a\}$ con

$$a + a = a \cdot a = a$$

In questo caso l'elemento a funziona sia da *zero* che da e , anzi se in un anello si verifica che $0 = 1$ questo è proprio l'anello mono-elemento.

Osservazione: ogni anello ha necessariamente due elementi: *zero* ed e .

2) $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$, $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$, $(\mathbb{R}, +, \bullet)$, $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ sono anelli commutativi unitari ed interi.

3) $(n\mathbb{Z}, +, \bullet)$, cioè l'insieme dei multipli interi relativi di un fissato intero $n \geq 2$, ossia

$$2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$3\mathbb{Z} = \{\dots, -9, -3, 0, 3, 9, \dots\}$$

.....

$$n\mathbb{Z} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$$

con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione, costituisce un anello commutativo non unitario (non è possibile ottenere, infatti, 1 come multiplo di n).

4) L'insieme dei polinomi a coefficienti interi ad una indeterminata costituisce un anello commutativo unitario.

5) $(M(n), +, \bullet)$, cioè l'insieme delle matrici quadrate di ordine n con le note operazioni di addizione e moltiplicazione, costituisce un anello unitario non commutativo e non integro.

Ad esempio in $M(2)$ le seguenti due matrici A e B non sono nulle ma hanno prodotto nullo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. CORPI E CAMPI

Definizione 4.1.

Definiamo *corpo* un anello $(A, +, \bullet)$ nel quale la struttura $(A \neq \emptyset, \bullet)$ è un gruppo, non necessariamente commutativo.

Osservazione: in un corpo non esistono divisori dello zero, poiché se fosse $ab = 0$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$, esistendo a^{-1} si avrebbe $a^{-1}(ab) = 0$ cioè $b = 0$, contro l'ipotesi.

Definizione 4.2.

Un corpo commutativo si dice *campo*, cioè un *campo* è un anello unitario $(A \neq \emptyset, +, \bullet)$ tale che $(A, \bullet)$ è un gruppo abeliano.

ESEMPIO

$(\mathbb{Q}, +, \bullet)$, $(\mathbb{R}, +, \bullet)$, $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ sono campi.

ESEMPI PRELIMINARI

Si consiglia allo studente di porre l'attenzione sui seguenti esempi 1)-7) relativi al capitolo sulle *matrici e determinanti* prima di risolvere gli *esercizi proposti*:

1) Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ due matrici di ordine rispettivamente 2×3 e 3×3 .

Scrivere A per righe e B per colonne; calcolare poi il prodotto AB .

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A_1 = (2, 3, 2) \\ A_2 = (1, 1, 2) \end{cases}$$
$$B = (B_1 \ B_2 \ B_3) \quad \text{con} \quad \begin{cases} B_1 = (3, 2, 1)^T \\ B_2 = (1, 3, 1)^T \\ B_3 = (2, 3, 1)^T \end{cases}$$

Segue quindi:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 15 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ con $\det A = 0$ trovare la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che:

a) $AB = 0$

b) $BA = 0$

Si ha:

$$a) AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 6a+4c & 6b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2c = 0 \\ 3b+2d = 0 \end{cases}$$

Segue:

$$a = -2t \quad c = 3t \quad b = -2u \quad d = 3u$$

Dunque:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = tu \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

b) stessi calcoli

3) Dati i tre vettori 4-dimensionali $\vec{u} (2, 1, 2, 1)$, $\vec{v} (2, -3, 1, 1)$ e $\vec{w} (4, -1, -1, 2)$ provare che sono linearmente indipendenti.

È sufficiente, in tal caso, osservare che la matrice associata $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango tre.

4) Con riferimento alla matrice A dell'esercizio precedente provare che i quattro vettori-colonna di A sono linearmente dipendenti.

Essendo tre il rango della matrice A segue che esattamente tre colonne sono linearmente indipendenti; del resto la quarta colonna è proporzionale alla prima.

5) Sia data una matrice quadrata con determinante nullo. Provare che una sua riga è combinazione lineare delle precedenti.

Si consideri una matrice quadrata A di ordine n . Poiché $\det A = 0$, la caratteristica di A è al più $n-1$; segue che le n righe sono linearmente dipendenti e così pure le colonne. Dunque esiste almeno una riga che è combinazione lineare delle rimanenti.

6) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trovare, se esiste, la sua inversa A^{-1} .

Osserviamo innanzitutto che $\det A = 1 \neq 0$, cioè esiste A^{-1} . Per calcolarla formiamo la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_2]$$

trasformando così B nel seguente modo:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

$A \quad I_2$
 $I_2 \quad A^{-1}$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Infatti si ha:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

O.K.!

Analogamente si consideri la matrice:

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = [I_2 | A]$$

Trasformiamo C come segue:

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$I_2 \qquad A \qquad \qquad \qquad A^{-1} \qquad I_2$

Dunque è possibile accostare la matrice identità sia a destra che a sinistra di A , ottenendo così sempre la stessa matrice inversa.

7) Dato l'insieme delle n -uple generato dai vettori 4-dimensionali $\vec{u} (2, 1, -1, 3)$, $\vec{v} (2, 2, 3, -1)$, $\vec{w} (4, 3, 2, 2)$ ed $\vec{t} (0, 1, 4, -4)$ si determini una base dello spazio delle combinazioni lineari da esse generato.

È sufficiente, pertanto, verificare quanti dei quattro vettori considerati sono linearmente indipendenti. Si consideri quindi la matrice ad essi associata:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché, come è facile notare, risulta $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, orlando tale minore con le residue righe e

colonne si ottengono i seguenti minori del terzo ordine:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque $r(A) = 2$. Inoltre le prime due righe della matrice A sono linearmente indipendenti per cui una base è costituita proprio dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

ESERCIZI PROPOSTI

A) Calcolare, se possibile, $A + B$, $A - B$, AB , BA e cA dove A , B e c sono dati 1)-8) dopo aver analizzato i seguenti esempi a)-g):

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad c = 2$$

$2 \times 2 \qquad \qquad \qquad 2 \times 2$

Sommando e sottraendo termine a termine risulta rispettivamente:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad e \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad \qquad \qquad 2 \times 2$

Svolgendo il prodotto righe per colonne si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot (-5) + 5 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) & -1 \cdot (-5) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -25 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2×2

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 5 - 5 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2×2

Moltiplicando ciascun elemento della matrice A per il numero c assegnato si ottiene:

$$cA = 2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

2×2

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad c = 3$$

$3 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 3$

Si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 3$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 6 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 9 & -3 & -9 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

3×3

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 21 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3

$$cA = 3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad c = -1$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

Risulta:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

AB non è possibile perché il numero delle colonne di A è diverso dal numero delle righe di B

BA non è possibile per il ragionamento precedente

$$cA = (-1)A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2×3

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad c = -2$$

$3 \times 3 \qquad \qquad 3 \times 3$

Si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad e \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \qquad \qquad 3 \times 3$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & \frac{17}{2} \\ -3 & 10 & \frac{35}{2} \end{pmatrix}$$

3×3

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 \\ -1 & \frac{7}{2} & 6 \\ 0 & 13 & 18 \end{pmatrix}$$

3×3

$$cA = (-2)A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

3×3

Osservazione: la somma e la differenza si possono effettuare solo nel caso di matrici aventi lo stesso ordine (il medesimo numero di righe e di colonne), cioè non è possibile sommare o sottrarre, per esempio, una matrice di ordine 2×3 ed una di ordine 3×3 ; analogamente, come già osservato, è possibile calcolare il prodotto tra due matrici solo se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice, cioè $A(m, k)$ e $B(k, n)$ sono moltiplicabili e la matrice prodotto sarà $C(m, n)$; il prodotto tra matrici, in generale, non è commutativo, ossia $AB \neq BA$, come è facile verificare dagli esempi precedenti.

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad c = \frac{1}{3}$$

$3 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 2$

$A + B$ e $A - B$ non sono possibili per quanto asserito nella precedente osservazione

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice nulla } 3 \times 2$$

BA non è possibile

$$cA = \frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3×3

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad c = 6$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 2$

$A + B$ e $A - B$ non sono possibili

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2×2

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3

$$cA = 6A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2×3

$$g) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad c = -1$$

$3 \times 4 \qquad 4 \times 2$

$A + B$ e $A - B$ non sono possibili

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & -4 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$$

3×2

BA non è possibile

$$cA = -A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice nulla } 3 \times 4$$

3×4

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad c = 2$$

$$\underline{R}: A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad c = -1$$

$$\underline{R}: A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 9 & -3 & 7 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 19 \\ -4 & -3 & 3 \\ 5 & 14 & 5 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 16 & -3 & 1 \\ 25 & -14 & 2 \\ 39 & -20 & 13 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}; \quad c = 3$$

$$\underline{R}: A + B, A - B, BA \text{ non sono possibili}; \quad AB = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 32 & -33 \\ 31 & -15 \\ 24 & -12 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & -15 & 21 \\ 0 & 3 & 12 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\underline{R}: A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 18 & 19 & 15 & 0 \\ 19 & 27 & 11 & -12 \\ 15 & 11 & 54 & 19 \\ 0 & -12 & 19 & 35 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 59 & 21 & 1 & 8 \\ 21 & 22 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -14 \\ 8 & 1 & -14 & 47 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad c = 1$$

$$\underline{\mathbf{R}}: A + B, A - B \text{ non sono possibili}; \quad AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -2 \\ 37 & -26 & 11 & 44 \\ 20 & -6 & -1 & 31 \\ 12 & -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} -16 & 8 & 19 \\ -5 & -11 & 19 \\ -20 & 10 & 2 \end{pmatrix};$$

$$cA = A$$

$$6) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 2 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad c = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\mathbf{R}}: A + B, A - B, BA \text{ non sono possibili}; \quad AB = \begin{pmatrix} 32 & 43 \\ 20 & 48 \\ 64 & 86 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & -1 & \frac{1}{3} \\ 9 & 3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}; \quad c = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\mathbf{R}}: A + B, A - B, AB \text{ non sono possibili}; \quad BA = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 5 \\ 63 & 21 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = -2$$

$$\underline{R}: A + B, A - B, BA \text{ non sono possibili}; \quad AB = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad cA = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -8 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

B) Scrivere la trasposta delle seguenti matrici 1)-6) dopo aver analizzato gli esempi a)-d):

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Come già accennato in precedenza la trasposta di una matrice si ottiene scambiando tra di loro le righe e le colonne; si ha, quindi:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione: nell'esempio b) $A = A^T$ ossia la matrice A è *simmetrica*.

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) A = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

La trasposta della matrice *diagonale* D è la matrice, anch'essa diagonale data da:

$$D^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Osservazione: ogni matrice diagonale è *simmetrica*; nel caso in cui la matrice A sia quadrata di ordine n allora la sua trasposta risulterà ancora una matrice quadrata di ordine n ; se, invece, A è una matrice rettangolare di ordine $m \times n$ allora la sua trasposta sarà ancora una matrice rettangolare di ordine, però, $n \times m$.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$5) D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[D^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

C) Calcolare i determinanti delle matrici 1)-30) dopo aver osservato quanto riportato nei seguenti esempi a)-e)

$$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Applicando la definizione data sui determinanti del secondo ordine si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -6 + 2 = -4$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando la regola di Sarrus si ha:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} = \\ &= 1 \cdot 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - [2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \cdot 2] = \\ &= 0 - 6 - 2 - (0 - 1 - 6) = -6 - 2 + 1 + 6 = -1 \end{aligned}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante richiesto si può calcolare con la regola di Sarrus, come fatto nel precedente esempio, oppure con la regola di Laplace, cioè sviluppando il determinante rispetto agli elementi di una riga o di una colonna. Se si considerano, ad esempio, gli elementi della seconda riga, si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} = A_{21} + A_{23} =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\
&= -(-6+2) - (-1+6) = 4-5 = -1
\end{aligned}$$

Dunque, per il calcolo dei determinanti del terzo ordine, è possibile utilizzare entrambi i metodi di cui agli esempi *b)* e *c)*.

$$d) A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando la *regola di Laplace*, cioè sviluppando il determinante, per esempio, secondo gli elementi della prima colonna, si ha:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = -A_{11} + 5A_{21} + 4A_{31} + 3A_{41} = \\
&= -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

I precedenti determinanti di ordine tre, a loro volta, possono essere calcolati applicando nuovamente la *regola di Laplace*, sviluppando ciascuno di essi secondo, per esempio, gli elementi della prima riga.

Risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\det A &= - \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\
&\quad -5 \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\
& -3 \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = \\
& = -[-2(-1) - 4(-13) - 5] - 5[-2(-1) - 3(-13) - 5(-5)] + 4[-2(7) - 3(-7) - 5(-14)] + \\
& -3[-2(11) - 3(-4) - 5(6)] = -49 - 330 + 308 + 120 = 49
\end{aligned}$$

Osservazione: si perveniva allo stesso risultato se si fossero calcolati i determinanti del terzo ordine con la *regola di Sarrus*.

$$\begin{aligned}
e) A &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\
\det A &= \begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

(si sommano alla seconda colonna la quarta colonna e la prima colonna moltiplicata per -1)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & -1 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

(si somma alla quarta colonna la prima colonna moltiplicata per 4)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 9 \\ -1 & -5 & -1 & -11 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

(applicando la *regola di Laplace*, sviluppando rispetto agli elementi della prima riga)

$$= 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 9 \\ -5 & -1 & -11 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

(si somma alla prima riga la seconda riga)

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & -11 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

(si somma alla prima colonna la terza colonna)

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -16 & -1 & -11 \\ -5 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

(applicando al *regola di Laplace*, sviluppando rispetto agli elementi della prima riga)

$$= 2 (-2) (-1)^4 \begin{vmatrix} -16 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -4 (11) = -44$$

Sempre applicando le proprietà sui determinanti è possibile calcolare ancora più rapidamente il determinante della matrice assegnata:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -7 \\ -1 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

(si somma la seconda riga alla terza e alla quarta riga)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

(applicando la *regola di Laplace*, sviluppando rispetto agli elementi della terza colonna)

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 10 & -8 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

(applicando la *regola di Laplace*, sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna)

$$= -2 (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 (22) = -44$$

Osservazione: tutti i determinanti di ordine $n \geq 5$ si risolvono con le stesse tecniche illustrate negli esempi d) e e).

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \quad [\det A = -19]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = -5]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad [\det A = 8]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \quad [\det A = -1]$$

$$5) A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad [\det A = -29]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \quad [\det A = -37]$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \quad [\det A = 34]$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad [\det A = 7]$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 19]$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad [\det A = -13]$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad [\det A = -1]$$

$$12) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad [\det A = -2]$$

$$13) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 26]$$

$$14) A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = -4]$$

$$15) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad [\det A = 71]$$

$$16) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad [\det A = -87]$$

$$17) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = 141]$$

$$18) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = 0]$$

$$19) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad [\det A = 70]$$

$$20) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = 65]$$

$$21) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 11]$$

$$22) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad [\det A = 0]$$

$$23) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -15 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad [\det A = 24]$$

$$24) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = -241]$$

$$25) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 15]$$

$$26) A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad [\det A = 38]$$

$$27) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad [\det A = 256]$$

$$28) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad [\det A = 0]$$

$$29) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 6 & 10 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad [\det A = -885]$$

$$30) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -5 \\ -3 & 4 & -10 & 9 & 16 \\ 2 & 1 & 11 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 12 & 5 & -3 \\ -5 & 2 & -24 & -5 & 22 \end{pmatrix} \quad [\det A = 52]$$

D) Calcolare la matrice dei complementi algebrici riportata negli esercizi 1)-12) dopo aver analizzato gli esempi a)-f):

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dove gli A_{ij} , complementi algebrici relativi agli elementi a_{ij} , sono il risultato del prodotto tra il determinante, ottenuto da A cancellando la riga i -esima e la colonna j -esima, e $(-1)^{i+j}$.

Pertanto risulta:

$$A_{11} = 3 \quad (\text{cancellando la prima riga e la prima colonna si ottiene il } |3| = 3, \text{ moltiplicato per } (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1)$$

$$A_{12} = -1 \quad (\text{cancellando la prima riga e la seconda colonna si ottiene il } |1| = 1, \text{ moltiplicato per } (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1)$$

$$A_{21} = -5 \quad (\text{cancellando la seconda riga e la prima colonna si ottiene il } |5| = 5, \text{ moltiplicato per } (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1)$$

$$A_{22} = 2 \quad (\text{cancellando la seconda riga e la seconda colonna si ottiene il } |2| = 2, \text{ moltiplicato per } (-1)^{2+2} = (-1)^4 = +1)$$

Quindi alla fine risulta:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Procedendo come nel precedente esempio si ha:

$$A_{11} = 5 \quad (\text{cancellando la prima riga e la prima colonna si ha il } |5| = 5 \text{ che va poi moltiplicato per } (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1)$$

$$A_{12} = -3 \quad (\text{cancellando la prima riga e la seconda colonna si ha il } |3| = 3 \text{ che va poi moltiplicato per } (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1)$$

$$A_{21} = -0 = 0 \quad (\text{cancellando la seconda riga e la prima colonna si ha il } |0| = 0 \text{ che va}$$

$$\text{poi moltiplicato per } (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1)$$

$$A_{22} = -1 \quad (\text{cancellando la seconda riga e la seconda colonna si ha il } |-1| = -1$$

$$\text{che va poi moltiplicato per } (-1)^{2+2} = (-1)^4 = +1)$$

Dunque:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche per le matrici di ordine $n \geq 3$ si può applicare la regola analizzata nel caso $n = 2$, chiaramente con le opportune variazioni.

Pertanto si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Restano da calcolare gli A_{ij} , complementi algebrici degli elementi a_{ij} .

Quindi otteniamo:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot [(-5) \cdot 0 - (-1) \cdot 4] = +1 \cdot (+4) = 4$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna di A)

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [3 \cdot 0 - (4 \cdot 1)] = -1 \cdot (-4) = 4$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la prima riga e la seconda colonna di A)

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [3 \cdot (-1) - (-5) \cdot 1] = +1 \cdot (-3 + 5) = 2$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la prima riga e la terza colonna di A)

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1] = -1 \cdot (1) = -1$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la seconda riga e la prima colonna di A)

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [(-1) \cdot 0 - (1 \cdot 1)] = +1 \cdot (-1) = -1$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la seconda riga e la seconda colonna di A)

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [(-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1] = -1 \cdot (1) = -1$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la seconda riga e la terza colonna di A)

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [0 \cdot 4 - (-5) \cdot 1] = +1 \cdot (5) = 5$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la terza riga e la prima colonna di A)

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [(-1) \cdot 4 - (3 \cdot 1)] = -1 \cdot (-4 - 3) = -1 \cdot (-7) = 7$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la terza riga e la seconda colonna di A)

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [(-1) \cdot (-5) - 0 \cdot 3] = +1 \cdot (5) = 5$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la terza riga e la terza colonna di A)

Dunque la matrice cercata è:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo, in primo luogo, come fatto nei precedenti esempi, i complementi algebrici relativi agli elementi della matrice data. Risulta allora:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = +1 \cdot (1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1 \cdot (0) = 0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = +1 \cdot (-2) = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [(-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0] = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = +1 \cdot (1) = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2] = -1 \cdot (2) = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0] = +1 \cdot (1) = 1$$

Dunque si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedendo in maniera più rapida di quanto non sia stato fatto in precedenza si ha:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1;$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2;$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-10 = -6; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1;$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4; \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Dunque:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 36 - 75 = -39; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(18 - 0) = -18;$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26; \quad A_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-30) = 30;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-5 + 12 - 8) = 1; \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 15 - 4 = -13;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 - 2 + 5) = -11; \quad A_{24} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10;$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 10 = 2; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-9) = 9;$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(15) = -15;$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(12 - 25) = 13; \quad A_{42} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -(25 - 10 - 12) = -3; \quad A_{44} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

Dunque:

$$A^* = \begin{pmatrix} -39 & -18 & -26 & 30 \\ 1 & -13 & -11 & 10 \\ 2 & 9 & 13 & -15 \\ 13 & 6 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ -1 & -8 & -5 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 2 & 10 & -26 \\ -1 & -5 & -13 \end{pmatrix} \right]$$

$$10) D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[D^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -48 & -30 & 8 & 24 \\ 12 & -10 & -2 & -6 \\ -11 & 15 & -4 & -12 \\ 16 & 10 & -26 & -8 \end{pmatrix} \right]$$

$$12) A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 11 \\ 7 & -15 & 25 & 21 \\ -59 & -12 & -6 & -22 \\ 4 & 8 & 4 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

E) Calcolare, con entrambi i metodi studiati, l'inversa delle matrici riportate negli esercizi 1)-12) dopo aver analizzato i seguenti esempi a)-h):

$$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

E' necessario calcolare in primo luogo il determinante di A per poter affermare che la matrice data ammette o no l'inversa.

Pertanto si ha:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Quindi, essendo rispettata la condizione necessaria e sufficiente, esiste l'inversa di A.

Primo metodo:

Dobbiamo calcolare la matrice dei complementi algebrici; risulta, quindi:

$$A_{11} = 4; \quad A_{12} = 2; \quad A_{21} = -1; \quad A_{22} = -3$$

Ne segue che:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Consideriamo la matrice

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_2]$$

Trasformiamo B come segue:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow 4R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -10 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{10}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 4 & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{array} \right] = [I_2 | A^{-1}]$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi A ammette inversa.

Primo metodo:

Si calcolano i complementi algebrici relativi agli elementi di A :

$$A_{11} = 2; \quad A_{12} = 0; \quad A_{21} = 1; \quad A_{22} = 1$$

da cui:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Si consideri la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A | I_2]$$

Trasformiamo B come segue:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2]{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = [I_2 | A^{-1}]$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Primo metodo:

Come già visto nell'esempio $d)$ in $\mathbb{D})$ i complementi algebrici relativi agli elementi di A sono i seguenti:

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = 0; \quad A_{13} = -2; \quad A_{21} = 1; \quad A_{22} = 1; \quad A_{23} = -2; \quad A_{31} = 0; \\ A_{32} = 0; \quad A_{33} = 1$$

Quindi:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che in questo esempio $A^{-1} \equiv (A^*)^T$.

Secondo metodo:

Consideriamo la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_3]$$

Trasformiamo B come segue:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}]$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque la nostra matrice A non ha inversa.

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Primo metodo:

I complementi algebrici sono:

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = 0; \quad A_{13} = -1; \quad A_{21} = 4; \quad A_{22} = -2; \quad A_{23} = -5; \quad A_{31} = -3;$$

$$A_{32} = 1; \quad A_{33} = 3$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Consideriamo la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_3]$$

Trasformiamo B come segue:

$$\begin{aligned} B &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow -(R_3 - 2R_1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}] \end{aligned}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Innanzitutto bisogna calcolare il determinante di A . Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{(si somma alla terza colonna la prima colonna moltiplicata per } -1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(si risolve tale determinante rispetto alla seconda riga)}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(si somma la seconda riga alla terza riga)}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \text{(si sviluppa rispetto agli elementi della terza riga)}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

Abbiamo così trovato che $\det A = 15 \neq 0$, cioè la matrice data ha l'inversa.

Primo metodo:

Calcoliamo ora i complementi algebrici relativi agli elementi di A . Si ha:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 3; & A_{12} &= 3; & A_{13} &= -3; & A_{14} &= 0; & A_{21} &= 1; & A_{22} &= 6; & A_{23} &= 14; \\ A_{24} &= -5; & A_{31} &= 2; & A_{32} &= -3; & A_{33} &= -2; & A_{34} &= 5; & A_{41} &= -7; & A_{42} &= 3; \\ A_{43} &= 7; & A_{44} &= 5 \end{aligned}$$

Dunque si ottiene:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 14 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & 5 \\ -7 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ -3 & 14 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{15} & -\frac{5}{15} & \frac{5}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Si consideri la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_4]$$

Trasformiamo B come segue:

$$\begin{aligned} B &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \\ &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow 3R_1 + R_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|cccc} 15 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 15 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{15}R_1 \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \\
& \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{8}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_4} \\
& \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = [I_4 | A^{-1}]
\end{aligned}$$

$$g) D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che il determinante di una qualunque matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale, per cui si ha:

$$\det D = -6 \neq 0$$

Primo metodo:

Si verifica immediatamente che i complementi algebrici degli elementi nulli sono uguali a zero. Pertanto risulta:

$$D_{11} = 2; \quad D_{22} = -6; \quad D_{33} = -3$$

Quindi:

$$D^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (D^*)^T$$

Dunque:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Si consideri la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_3]$$

Trasformiamo B come segue:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow -\frac{1}{3}R_1 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3}]{\quad} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}]$$

$$h) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Come di consueto calcoliamo il determinante della matrice data:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Pertanto A ammette inversa.

Primo metodo:

I complementi algebrici relativi agli elementi di A sono:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 5; & A_{12} &= -2; & A_{13} &= -6; & A_{21} &= -2; & A_{22} &= -2; & A_{23} &= 1; & A_{31} &= -1; \\ A_{32} &= -1; & A_{33} &= -3 \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Consideriamo la matrice:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_3]$$

Trasformiamo B come segue:

$$\begin{aligned} B &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -6 & 1 & -3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{7}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right] = [I_3 | A^{-1}]$$

Verifica:

a) $AA^{-1} = I_3$ (in generale $AA^{-1} = I_n$)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} + \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} - \frac{6}{7} & \frac{6}{7} + \frac{1}{7} & \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \\ -\frac{10}{7} - \frac{2}{7} + \frac{12}{7} & \frac{4}{7} - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} & \frac{2}{7} - \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \end{pmatrix} = I_3$$

b) $A^{-1}A = I_3$ (in generale $A^{-1}A = I_n$)

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} + \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} + \frac{6}{7} - \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} & \frac{2}{7} + \frac{6}{7} - \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} + \frac{6}{7} & \frac{6}{7} - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} & \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \end{pmatrix} = I_3$$

Le verifiche degli esempi precedentemente riportati sono lasciate per esercizio allo studente.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right]$$

$$5) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{7}{60} & \frac{17}{60} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \end{pmatrix} \right]$$

$$8) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix} \right]$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \right]$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$12) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} \\ -\frac{9}{20} & \frac{1}{3} & \frac{40}{3} & \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{40}{1} & \frac{20}{1} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

F) Verificare se i vettori riportati negli esercizi 1)-6) sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti e, nell'ipotesi in cui si verifichi quest'ultimo caso, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due, dopo aver osservato gli esempi a)-c):

$$a) \bar{v}_1 (1, 0, -2) \quad \bar{v}_2 (0, -3, 2) \quad \bar{v}_3 (3, -6, -2)$$

Si consideri la matrice associata ai tre vettori assegnati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Come è facile verificare risulta $\det A = 0$; quindi, in virtù di un *teorema* precedentemente riportato, i tre vettori sono linearmente dipendenti. E' ora possibile esprimere uno di essi, ad esempio $\bar{v}_3$, come combinazione lineare degli altri due nel modo seguente:

$$\bar{v}_3 (3, -6, -2) = a \bar{v}_1 (1, 0, -2) + b \bar{v}_2 (0, -3, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3, -6, -2) = a (1, 0, -2) + b (0, -3, 2) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a \\ -6 = -3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Dunque una combinazione lineare è data da:

$$\bar{v}_3 = a \bar{v}_1 + b \bar{v}_2 \Rightarrow \bar{v}_3 = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$$

Osservazione: chiaramente era possibile esprimere, ad esempio, il vettore $\bar{v}_2$ in funzione dei rimanenti ottenendo, così, una combinazione lineare diversa dalla precedente (la verifica è lasciata, per esercizio, allo studente).

$$b) \vec{v}_1 (3, -2, 5) \quad \vec{v}_2 (1, -1, 0) \quad \vec{v}_3 (0, 4, -2)$$

Procedendo come nell'esempio precedente si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché risulta $\det A = 22 \neq 0$, i tre vettori sono linearmente indipendenti.

$$c) \vec{v}_1 (1, 1, k) \quad \vec{v}_2 (-1, 1, -1) \quad \vec{v}_3 (2, k, 1)$$

Bisogna, in tal caso, studiare la lineare dipendenza o indipendenza al variare del parametro k ; si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & k \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi:

$$\det A = -k^2 - k = -k(k+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0 \vee k = -1$$

Dunque:

Primo caso:

$$k \neq 0 \wedge k \neq -1 \Rightarrow \text{i vettori sono linearmente indipendenti}$$

Secondo caso:

$$k = 0 \vee k = -1 \Rightarrow \text{i vettori sono linearmente dipendenti}$$

In questo caso, quindi, possiamo esprimere, ad esempio, il vettore $\vec{v}_1$ in funzione degli altri due:

$$\bullet \quad k = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = a \vec{v}_2 + b \vec{v}_3 \Rightarrow (1, 1, 0) = a(-1, 1, -1) + b(2, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -a + 2b \\ 1 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Dunque una combinazione lineare è data da:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\bullet \quad k = -1 \Rightarrow \vec{v}_2 = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_3 \Rightarrow (-1, 1, -1) = a(1, 1, -1) + b(2, -1, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = a + 2b \\ 1 = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Dunque una combinazione lineare è data da:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{3} \vec{v}_2 - \frac{2}{3} \vec{v}_3$$

$$1) \vec{v}_1(-1, 2); \vec{v}_2(3, 1) \quad [L.I.]$$

$$2) \vec{v}_1(-1, 1); \vec{v}_2(0, 3); \vec{v}_3(2, 1) \quad [L.D.; \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3]$$

$$3) \vec{v}_1(1, -1); \vec{v}_2(0, 1); \vec{v}_3(-1, 1) \quad [L.D.; \vec{v}_1 = -\vec{v}_3]$$

$$4) \vec{v}_1(1, 5, -4); \vec{v}_2(2, 0, 1); \vec{v}_3(4, 10, -7) \quad [L.D.; \vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2]$$

$$5) \vec{v}_1(3, -7, 1); \vec{v}_2(1, -1, 2); \vec{v}_3(-2, 2, -4) \quad [L.D.; \vec{v}_3 = -2\vec{v}_2]$$

$$6) \vec{v}_1(-1, 2, 3); \vec{v}_2\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, k\right); \vec{v}_3(k, 4, 6) \quad [L.D. \text{ per } k = -2; \vec{v}_3 = 2\vec{v}_1]$$

G) Calcolare la caratteristica delle matrici riportate negli esercizi 1)-13) dopo aver analizzato gli esempi a)-i):

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con l'osservare che $m = 2$ ed $n = 4$ per cui $0 \leq r(A) \leq \min \{ 2, 4 \} = 2$, cioè $r(A) \leq 2$.

Vediamo allora se $r(A) = 2$, cioè se esiste un minore di ordine due, estraibile da A , diverso da zero.

Risulta:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Dunque $r(A) = 2$.

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$0 \leq r(A) \leq \min \{ 2, 4 \} = 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

Vediamo allora se $r(A) = 2$, cioè se esiste un minore di ordine due di A non nullo. Segue che:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ma} \quad A'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Dunque $r(A) = 2$.

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$0 \leq r(A) \leq \min \{ 3, 3 \} = 3 \Rightarrow r(A) \leq 3$$

Vediamo se $r(A) = 3$; l'unico minore di ordine tre estraibile da A è proprio $\det A$. Risulta, quindi:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto $r(A) \neq 3$. Vediamo quindi se $r(A) = 2$. Si noti che:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Dunque $r(A) = 2$.

$$d) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per definizione si ha $r(A) = 0$.

Osservazione: la caratteristica di una matrice nulla, indipendentemente dal suo ordine, è sempre zero.

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$0 \leq r(A) \leq \min \{ 3, 2 \} = 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

Vediamo se $r(A) = 2$. Risulta:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Dunque $r(A) = 2$.

$$f) B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: si può dimostrare che due matrici trasposte l'una dell'altra hanno la stessa caratteristica, cioè $r(A^T) = r(A)$.

Si noti che che la matrice B è la trasposta di A dell'esempio $b)$. Dalla precedente osservazione segue, pertanto, che $r(B) = r(A) = 2$.

Lo studente provi, per esercizio, con il metodo fino ad ora utilizzato, che risulta proprio $r(B) = 2$.

Illustriamo ora alcuni esempi in cui la caratteristica di una matrice è calcolata sia con il metodo precedente sia con il *Teorema di Kronecker*.

$$g) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Essendo $m = 3$ ed $n = 4$ si ha $r(A) \leq 3$.

Primo metodo

Come fatto nei precedenti esempi vediamo se $r(A) = 3$, cioè se esiste un minore di ordine tre estraibile da A non nullo. Osserviamo che, poichè tali minori sono quattro, occorre calcolare ben quattro determinanti del terzo ordine. Poichè:

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

risulta $r(A) = 3$. (Le cose si sarebbero complicate qualora tutti e quattro i determinanti del terzo ordine fossero risultati nulli!)

Secondo metodo

Utilizziamo il *Teorema di Kronecker* o *degli orlati*. Si parte sempre dalla condizione che $r(A) \leq 3$.

In tal caso però si considera un minore di ordine due (perchè più facile da calcolare) non nullo. Sia esso:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Andiamo adesso a considerare gli *orlati* di A' in A . Essi sono due:

$$A'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad e \quad A''' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Poiché } A''' = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-5) = -10 \neq 0, \text{ è } r(A) = 3.$$

Osservazione: se entrambi i minori *orlati* fossero risultati nulli allora $r(A) = 2$.

$$h) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Risulta $r(A) \leq 4$.

Primo metodo

Vediamo se $r(A) = 4$, cioè se esiste un minore di ordine quattro di A non nullo; l'unico minore di ordine quattro è proprio $\det A$. Calcoliamo allora tale determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \text{(sottraendo alla prima colonna la quarta colonna)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \text{(sviluppando secondo gli elementi della seconda riga)}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $r(A) \neq 4$. Vediamo se $r(A) = 3$, cioè se esiste un minore di ordine tre in A diverso da zero. Si ha:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Dunque $r(A) = 3$.

Secondo metodo

Si ha:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Esaminiamo adesso gli *orlati* di A' . Tra essi c'è il minore:

$$A'' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Si può passare ad esaminare pertanto gli *orlati* di A'' ; l'unico *orlato* è proprio $\det A$. Poiché, come già visto nel *primo metodo*, $\det A = 0$, risulta $r(A) = 3$.

$$i) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

In primo luogo osserviamo che $r(A) \leq 3$.

Primo metodo

Vediamo se può essere $r(A) = 3$, cioè se esiste un minore del terzo ordine in A non nullo. Si ha:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$A'' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$A''' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{iv} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché tutti i minori del terzo ordine di A sono nulli, andiamo ad analizzare quelli del secondo ordine (se ce n'è uno non nullo allora $r(A) = 2$). Risulta:

$$A'' = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Dunque $r(A) = 2$.

Secondo metodo

Partiamo da un minore del secondo ordine non nullo. Sia esso:

$$A' = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Consideriamo adesso tutti gli *orlati* di A' in A . Essi sono due e precisamente:

$$A'' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad e \quad A''' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

Poiché $A'' = 0$ e $A''' = 0$, risulta, come già ottenuto con il metodo precedente, $r(A) = 2$.

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 3]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 5 & 3 & 0 & -8 \\ 7 & 7 & 6 & -20 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 & -8 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -10 & 1 \\ 5 & 11 & -6 & -32 & 50 \\ 1 & 10 & -9 & -22 & 49 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & -9 & -3 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 3]$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 11 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 3]$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 11 & -22 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$11) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

$$12) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 1]$$

$$13) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad [r(A) = 2]$$

H) *Determinare la caratteristica delle seguenti matrici 1)-6), al variare del parametro reale k , dopo aver osservato il seguente esempio a):*

$$a) A = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Cominciamo con il trovare i valori di k per i quali si annulla il determinante della matrice A , cioè risolviamo l'equazione:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante si ottiene:

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

Questa equazione ammette le radici $k = 1$ e $k = -4$.

Dobbiamo pertanto distinguere i seguenti tre casi:

Primo caso

Per $k \neq 1$ e $k \neq -4$, risultando diverso da zero il determinante della matrice A , si ha $r(A) = 3$.

Secondo caso

Per $k = 1$, si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

per cui, in tal caso, $r(A) = 2$.

Terzo caso

Per $k = -4$, si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad A' = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

per cui anche in questo caso risulta $r(A) = 2$.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$[r(A) = 3 \text{ per } k \neq 1 \text{ e } k \neq 2; r(A) = 2 \text{ per } k = 1 \text{ e per } k = 2]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$[r(A) = 3 \text{ per } k \neq 1; r(A) = 1 \text{ per } k = 1]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & k \\ \frac{1}{2} & 1 \\ k & 3 \end{pmatrix}$$

$$[r(A) = 2 \forall k]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} k & 1 & k-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1-k \end{pmatrix}$$

$$[r(A) = 2 \text{ per } k \neq 1; r(A) = 1 \text{ per } k = 1]$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 4 & -k & -1 \\ k & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$[r(A) = 3 \text{ per } k \neq 1 \text{ e per } k \neq -1/3; r(A) = 2 \text{ per } k = 1 \text{ e per } k = -1/3]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ k & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[r(A) = 3 \text{ per } k \neq -1/2; r(A) = 2 \text{ per } k = -1/2]$$